第五章 傅里叶变换光学

第一节 衍射系统的屏函数和相因子判断法

5.1 衍射系统的屏函数和相因子判断法

5.1.1 傅里叶变换光学概述

5.1.2 衍射系统及其屏函数

5.1.3 相因子分析法

5.1.4 相位衍射元件的位相变换函数及分析

5.1.1 傅里叶变换光学概述

现代光学的三件大事

- 全息术—1948年
- 像质评价的传递函数—1955年
- 激光器—1960年

Joseph Fourier
（1768-1830）
法国科学家
研究领域：数学、物理、历史

傅里叶变换光学的基本思想

引入变换的概念，将数学上周期信号的傅里叶级数展开应用于光学，对应于将复杂的图像分解为一系列单频信息的合成。

主要内容

（1）光场的**空间频谱**—**时间频谱**的变换（傅里叶光谱仪）

（2）成像系统中存在的变换关系—物像关系（光学空间滤波、光学信息处理、光学传递函数、波前再现和全息术）

实现途径

物理器件、物理效应、和物理装置。

- 傅里叶光学的基本概念起源于19世纪后期。 20世纪60代激光问世后，迅速发展为一门新的光学学科。
- 基本思想：用频谱的语言分析物面的信息，用改变频谱的手段来处理信息。
- 傅里叶光学是信息光学的理论基础。
- 光波在传递信息过程中，伴随能量的传递。

  有效利用光辐射的能量：

  照明工程、激光武器、激光加工、太阳能利用

  考虑包含光信息的光场分布在传递过程中所发生的变化：

  光信息的记录、显示和测量，光信息的处理等

用变换的观点看成像和光谱

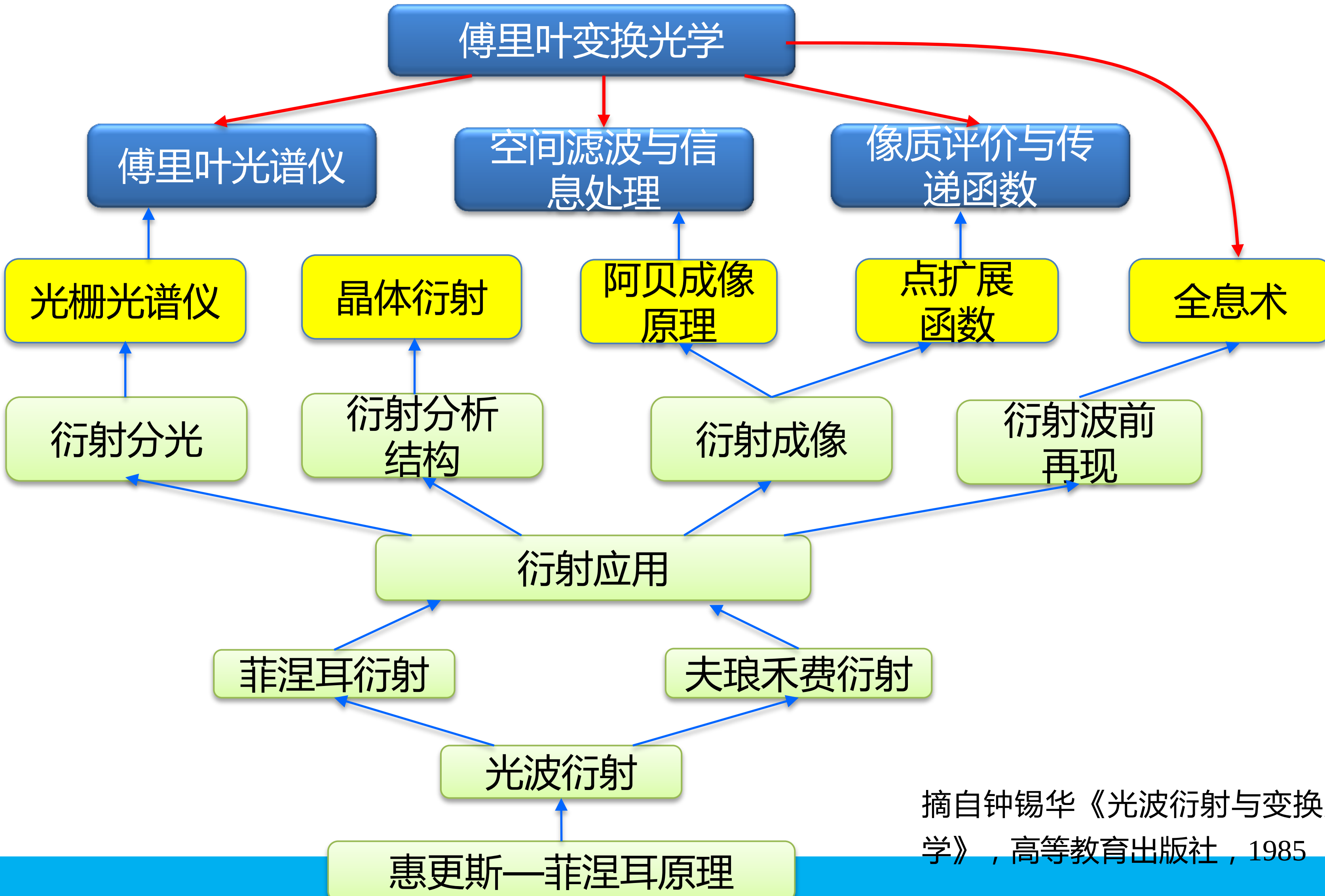
$$\boxed{\text{干涉图}} \xrightleftharpoons{\text{干涉}} \boxed{\text{光谱图}}$$

$$\boxed{\text{物}} \xrightleftharpoons{\text{衍射}} \boxed{\text{像}}$$

- 光的衍射和干涉最基本的方法: 光的相干叠加。
- 另外一个角度: 入射波场，遇到障碍物之后，波场中各种物理量重新分布，相当于“波前(函数)重构”。衍射障碍物将简单的入射场变换成了复杂的衍射场。
- →可以从障碍物对波场的（数学）变换作用，来分析衍射。
- →从更广义的角度，不仅仅是相干波场的障碍物，非相干系统中的一切使波场或者波面产生改变的因素，它们的作用都可以应用变换的方法处理。

5.1.1 傅里叶变换光学概述

傅里叶变换光学与经典波动光学的关系（衍射）



摘自钟锡华《光波衍射与变换光学》，高等教育出版社，1985

5.1.2 衍射系统及其屏函数

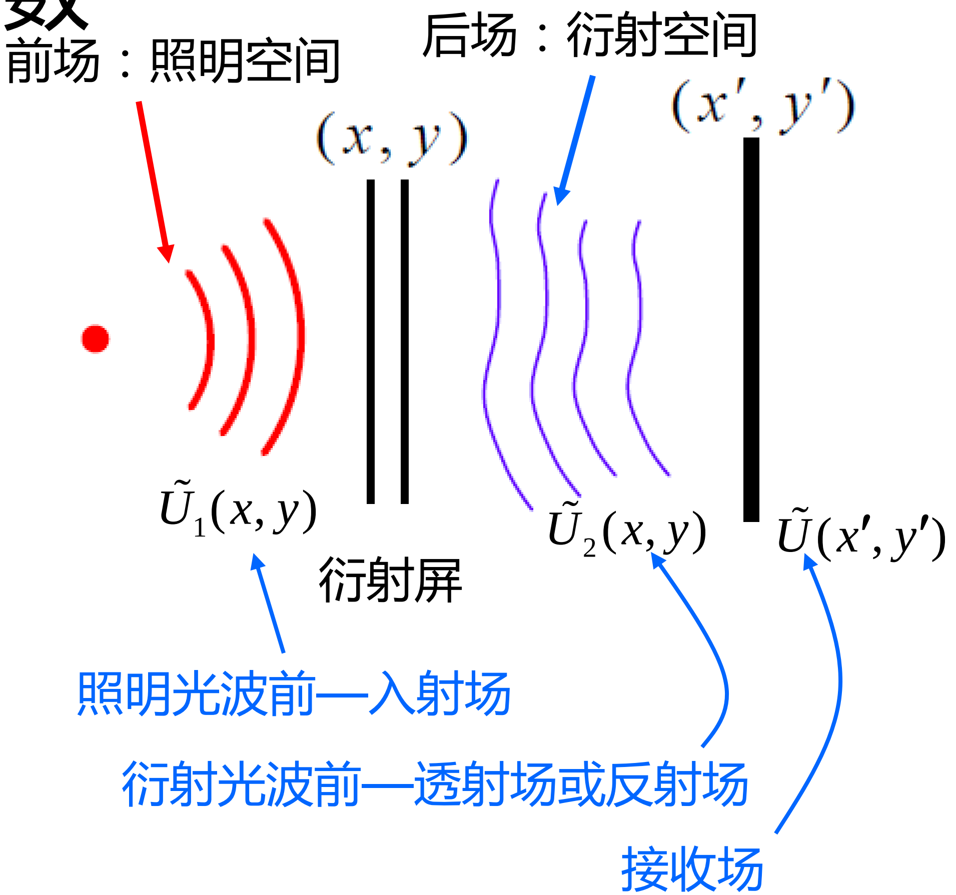
衍射屏、照明空间和场

衍射屏

能使波前的复振幅（**波前函数**）发生改变的物，统称为**衍射屏**。

照明空间

衍射屏将波的空间分为前场和后场两部分。前场为照明空间，后场为衍射空间。



入射场、透射场与接收场

波在衍射屏的前后表面处的复振幅或波前函数分别称为入射场、透射场（或反射场），接收屏上的复振幅为接收场。

衍射系统贯穿波前变换

5.1.2 衍射系统及其屏函数

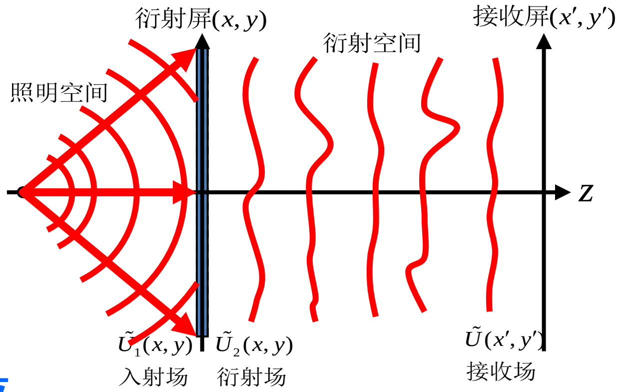
屏函数及其作用

衍射屏的作用是使入射场转换为透射场（或反射场）。用函数表示，就是衍射屏的透过率或反射率函数，统称**屏函数。**

衍射屏函数 $$\tilde{t}(x,y)=\frac{\tilde{U}_2(x,y)}{\tilde{U}_1(x,y)}$$

$$\tilde{t}(x,y)=\boxed{t(x,y)}\exp[i\boxed{\varphi_t(x,y)}]$$

屏函数的模。　　屏函数的幅角，即相位。



模为常数的衍射屏称为相位型的，如透镜、棱镜等。

幅角为常数的衍射屏称为振幅型的，如单缝、圆孔等。

思考：黑白光栅和正弦光栅是什么类型的衍射屏？二者有何区别?

5.1.3 相因子分析法

相因子分析法的基本思路

（1）若已知衍射屏的屏函数，就可以确定衍射场，进而完全确定接收场。

（2）但由于衍射屏的复杂性以及衍射积分求解的困难，多数情况下解析的完全确定屏函数几乎是不可能的。

（3）因此，只能采取一定的近似方法获取衍射场的主要特征。

（4）如果知道了屏函数的相位，则能通过研究波的相位改变来确定波场的变化。这种方法称为相因子判断法。

（5）分析条件：一般在傍轴近似下进行判断。

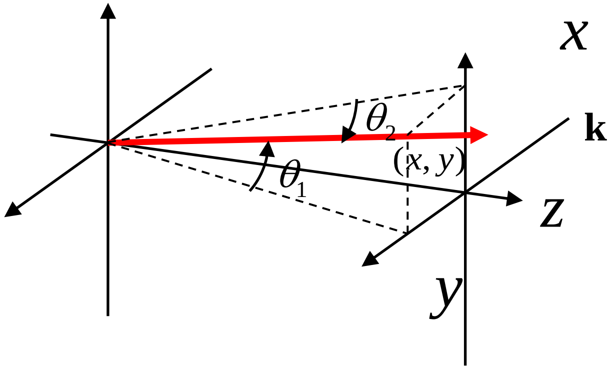
（6）**出发点：平面波与球面波的波动方程的表达形式。**

（7）认为透镜和棱镜对光的吸收处处相等或无吸收，可忽略振幅的变化，认为是相位型衍射屏。

相因子分析法，简单的说，就是根据波前函数的相因子来判断波场的特性，分析衍射场的主要特征。

5.1.3 相因子分析法

近轴条件下典型光波场在平面波前(x,y)上的相因子



平面波 $\exp[ik(\sin\theta_1 x + \sin\theta_2 y)]$

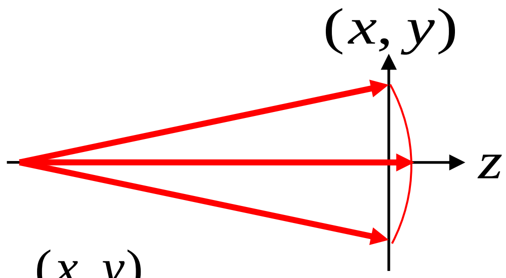
特殊情况1—传播方向平行于X-Z平面(θ_2=0)

$$\exp(ik\sin\theta_1 x)$$

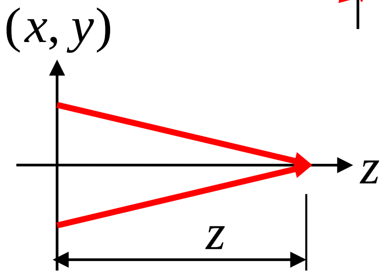
特殊情况2—传播方向平行于X-Z平面(θ_1=θ_2=0)

$$1$$

轴上物点球面波



发散 $$\exp[ik\frac{x^2+y^2}{2z}]$$

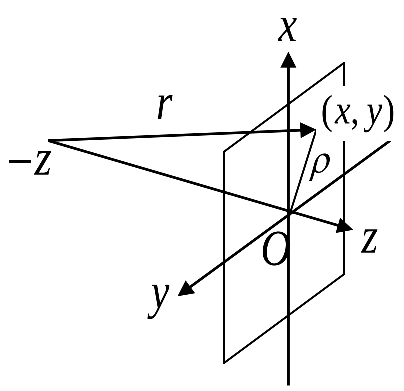


会聚 $$\exp[-ik\frac{x^2+y^2}{2z}]$$

5.1.3 相因子分析法

近轴条件下典型光波场在平面波前(x,y)上的相因子

轴上物点球面波(续)



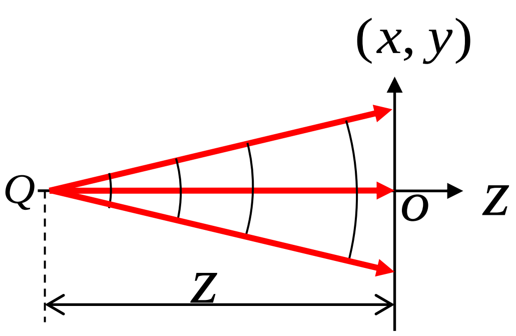
$$(1+x)^{\alpha} \approx 1+\frac{\alpha}{2}x,\quad (x \to 0)$$

$$r=\sqrt{z^2+\rho^2}=z\sqrt{1+\frac{\rho^2}{z^2}}=z(1+\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{z^2})$$

$$\exp[ikr]=\exp[ikz]\exp[ik\frac{x^2+y^2}{2z}]$$

（1）若取$z=0$处相位为0，即以原点为相位零点，则xoy平面上点（x，y）的相位因子为

$$\exp[ik\frac{x^2+y^2}{2z}]$$



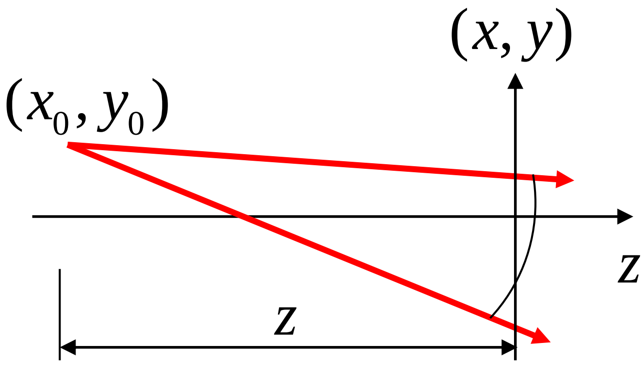
（2）以物点相位为0，xoy平面上点（x，y）的相位因子为

$$\exp[ikz+ik\frac{x^2+y^2}{2z}]$$

5.1.3 相因子分析法

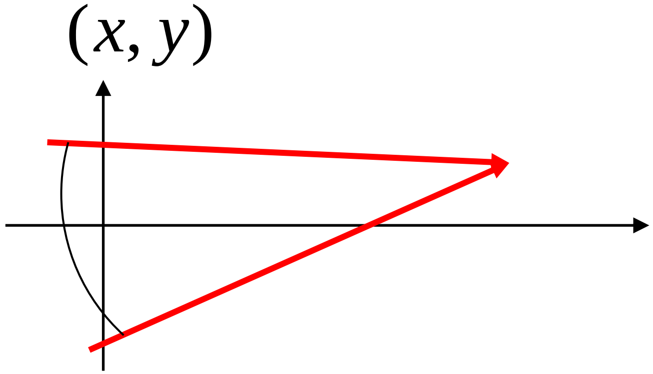
近轴条件下典型光波场在平面波前(x,y)上的相因子

轴外物点球面波



发散球面波

$$\exp[ik(\frac{x^2+y^2}{2z}-\frac{xx_0+yy_0}{z})]$$



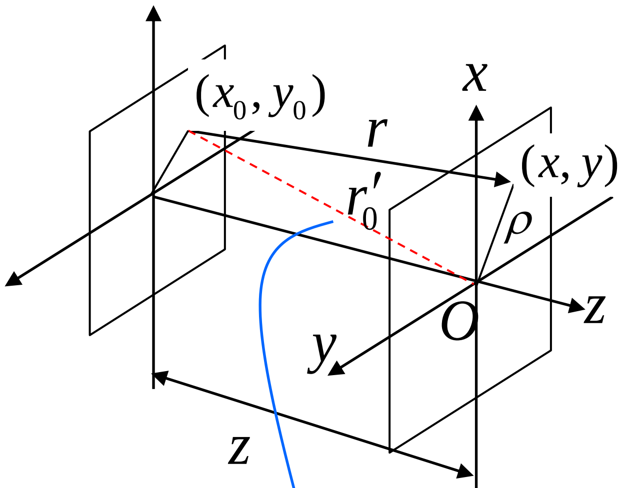
会聚球面波

$$\exp[-ik(\frac{x^2+y^2}{2z}-\frac{xx_0+yy_0}{z})]$$

5.1.3 相因子分析法

近轴条件下典型光波场在平面波前(x,y)上的相因子

轴外物点波面相因子的计算



近轴条件 $\Rightarrow r_0' \approx z$

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}$$

$$= \sqrt{z^2 + x_0^2 + y_0^2 + x^2 + y^2 - 2(xx_0 + yy_0)}$$

$$= r_0' \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{r_0'^2} - \frac{2(xx_0+yy_0)}{r_0'^2}}$$

$$\approx r_0'\left(1 + \frac{x^2+y^2}{2r_0'^2} - \frac{xx_0+yy_0}{r_0'^2}\right)$$

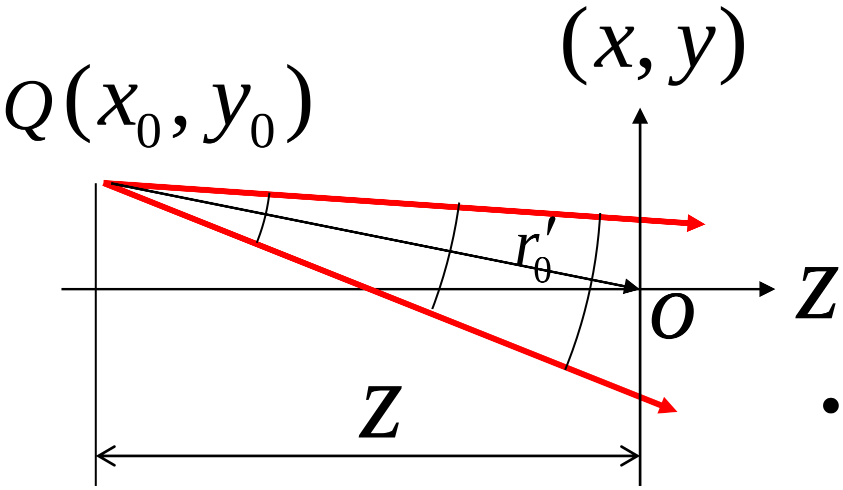
$$\approx r_0' + \frac{x^2+y^2}{2z} - \frac{xx_0+yy_0}{z}$$

$$\exp[ikr] = \exp[ikr_0']\exp\left[ik\left(\frac{x^2+y^2}{2z} - \frac{xx_0+yy_0}{z}\right)\right]$$

5.1.3 相因子分析法

近轴条件下典型光波场在平面波前(x,y)上的相因子

轴外物点波面相因子的计算



- 以**原点**相位为0（z=0处相位为0），xoy平面上点（x，y）的位相因子

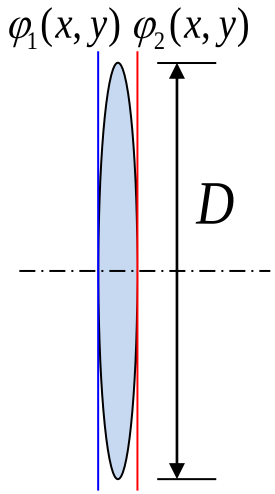
$$\exp[ik(\frac{x^2+y^2}{2z}-\frac{xx_0+yy_0}{z})]$$

- 以**物点**相位为0，xoy平面上点（x，y）的相位因子

$$\exp[ikr_0'+ik(\frac{x^2+y^2}{2z}-\frac{xx_0+yy_0}{z})]$$

5.1.4 相位衍射元件的位相变换函数及分析

透镜的位相变换函数

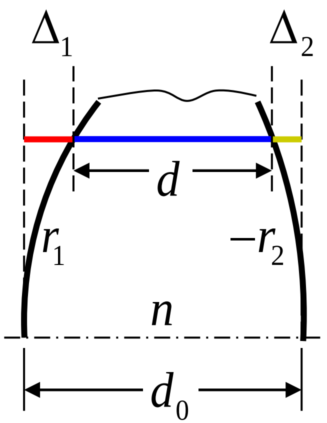


设透镜的有效口径为D，则透镜的位相变换函数为

$$\tilde{t}_L=\frac{A_2}{A_1}\exp[i(\varphi_2-\varphi_1)]=\begin{cases}a(x,y)\mathrm{e}^{i\varphi_L(x,y)}, & r<\dfrac{D}{2}\\[2ex] 0, & r>\dfrac{D}{2}\end{cases}$$

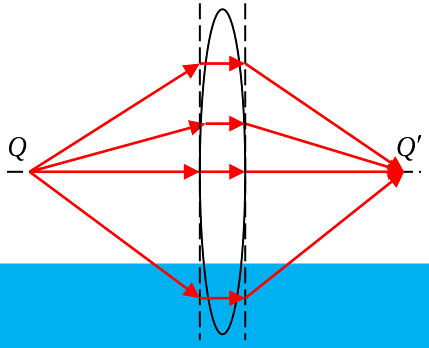
若忽略透镜的吸收，即 $a(x,y)=A_2/A_1=1$

则有 $\tilde{t}_L(x,y)=\exp[i\varphi_L(x,y)]=\exp\{i[\varphi_2(x,y)-\varphi_1(x,y)]\}$



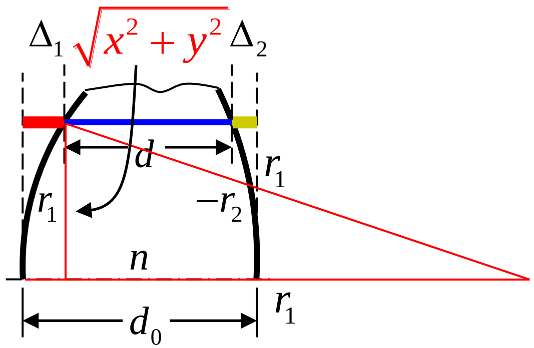
是位相型变换函数，其作用有二：（1）光瞳；（2）波面变换

进行计算的条件：傍轴近似，入射波前、出射波前取平面，此时近似认为透镜中的光波波矢平行于光轴。



5.1.4 相位衍射元件的位相变换函数及分析

透镜位相变换函数的计算



从图上可以求得光波经透镜后的相位差

$$\varphi_L(x,y)=\frac{2\pi}{\lambda}[\Delta_1+\Delta_2+nd(x,y)]$$

$$=\frac{2\pi}{\lambda}[\Delta_1+\Delta_2+n(d_0-\Delta_1-\Delta_2)]$$

$$\varphi_0=\frac{2\pi}{\lambda}nd_0$$

$$=\varphi_0-\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)(\Delta_1+\Delta_2)$$

$\frac{x^2+y^2}{r_1^2}\to 0$ 可用 $(1+x)^\alpha\approx 1+\frac{\alpha}{2}x,\ \ (x\to 0)$

傍轴条件下，

$$\Delta_1(x,y)=r_1-\sqrt{r_1^2-(x^2+y^2)}=r_1\left(1-\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{r_1^2}}\right)\approx\frac{x^2+y^2}{2r_1}$$

$$\Delta_2(x,y)=-r_2-\sqrt{r_2^2-(x^2+y^2)}\approx-\frac{x^2+y^2}{2r_2}$$

$$\varphi_L(x,y)=\varphi_0-\frac{2\pi}{\lambda}\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)(x^2+y^2)=\varphi_0-k\frac{x^2+y^2}{2F}\qquad F=\frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}$$

5.1.4 相位衍射元件的位相变换函数及分析

透镜位相变换函数的计算（续）

$$\varphi_L(x,y)=\varphi_0-\frac{2\pi}{\lambda}\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)(x^2+y^2)=\varphi_0-k\frac{x^2+y^2}{2F}\qquad F=\frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}$$

位相变换函数

$$\tilde{t}_L(x,y)=\exp(i\varphi_0)\exp\left[-ik\frac{x^2+y^2}{2F}\right]=\exp(i\varphi_0)\exp[i\varphi_L]$$

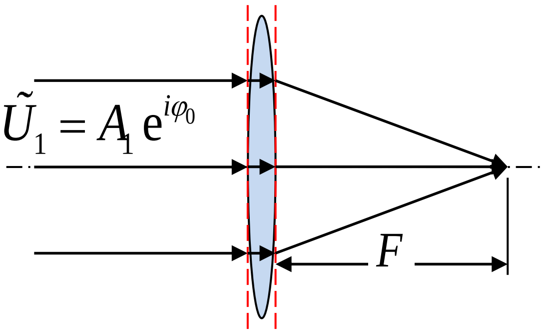
相因子 $\varphi_L=-k\dfrac{x^2+y^2}{2F}$

常数因子对相位变换不起作用，可以忽略。

5.1.4 相位衍射元件的位相变换函数及分析

透镜对波面的变换—平面波入射

平行光轴入射的平面波



入射场：平面波 $\tilde{U}_1 = A_1 e^{i\varphi_0}$

$$\varphi_L = -k\frac{x^2+y^2}{2F}$$

出射场：

$$\tilde{U}_2 = \tilde{U}_1 \tilde{t}_L(x,y) = A_1 e^{i\varphi_0} e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2F}} = A_1 e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2F}+i\varphi_0}$$

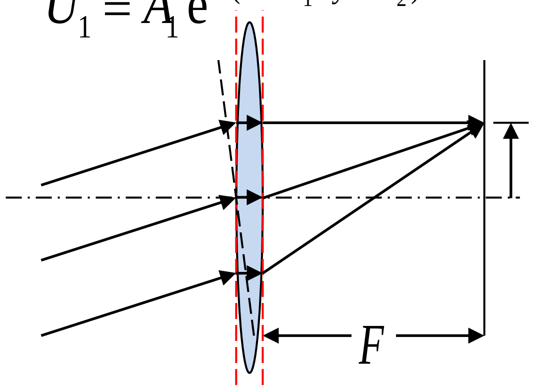
出射场特征：汇聚到轴上F处的球面波，焦距 $f=F$。

斜入射的平面波

对照

$$\exp[ik(\frac{x^2+y^2}{2z} - \frac{xx_0+yy_0}{z})]$$

$$\tilde{U}_1 = A_1 e^{ik(x\sin\theta_1 + y\sin\theta_2)}$$



入射场： $\tilde{U}_1 = A_1 e^{ik(x\sin\theta_1 + y\sin\theta_2)}$

出射场：

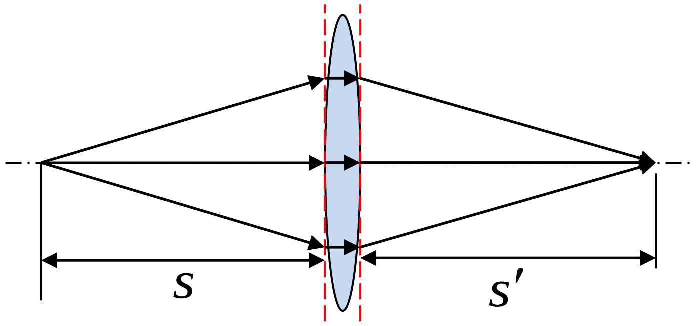
$$\tilde{U}_2 = A_1 e^{-ik[\frac{x^2+y^2}{2F} - (x\sin\theta_1 + y\sin\theta_2)]}$$

$$= A_1 e^{-ik[\frac{x^2+y^2}{2F} - \frac{xF\sin\theta_1 + yF\sin\theta_2}{F}]}$$

出射场特征：汇聚到轴上($F\sin\theta_1$, $F\sin\theta_2$, F)处的球面波。

5.1.4 相位衍射元件的位相变换函数及分析

透镜对波面的变换—球面波入射



入射场：球面波 $\tilde{U}_1 = A_1 \mathrm{e}^{ik\frac{x^2+y^2}{2s}}$

出射场：

$$\tilde{U}_2 = A_1 \mathrm{e}^{ik\frac{x^2+y^2}{2s}} \mathrm{e}^{-ik\frac{x^2+y^2}{2F}}$$

$$= A_1 \mathrm{e}^{-ik(\frac{x^2+y^2}{2F}-\frac{x^2+y^2}{2s})}$$

$$= A_1 \mathrm{e}^{-ik\frac{x^2+y^2}{2}(\frac{1}{F}-\frac{1}{s})}$$

出射场特征：汇聚到轴上s'处的球面波。

球心位置 $s' = (\frac{1}{F}-\frac{1}{s})^{-1} = \frac{sF}{s-F}$ $\Longrightarrow$ $\frac{F}{s}+\frac{F}{s'}=1$

Gauss 公式

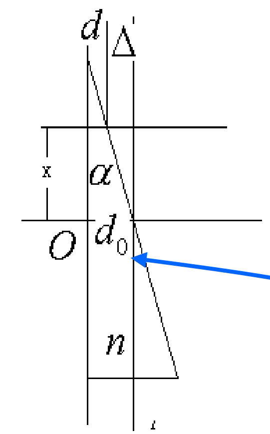
5.1.4 相位衍射元件的位相变换函数及分析

棱镜的相位变换函数

对于薄的楔形棱镜，可以得到

$$\varphi_P(x,y)=\frac{2\pi}{\lambda}(\Delta+nd)=\frac{2\pi}{\lambda}(\Delta+nd_0-n\Delta)$$

$$=\varphi_0-\boxed{\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\Delta}$$



其中 $\varphi_0=\frac{2\pi}{\lambda}nd_0$ $\quad \Delta=\alpha x$

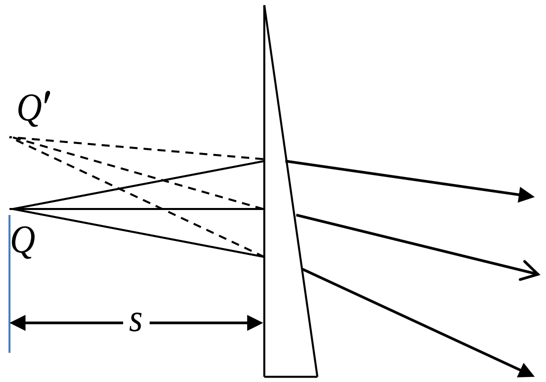
相因子 $\varphi_P(x,y)=-k(n-1)\alpha x$

d_0—棱镜中心处的厚度

位相变换函数 $\tilde{t}_P(x,y)=\exp[-ik(n-1)(\alpha_1 x+\alpha_2 y)]$

5.1.4 相位衍射元件的位相变换函数及分析

棱镜的相位变换作用



轴上物点与棱镜之间的距离为s，考虑一维情况。

入射波前函数（球面波） $\tilde{U}_1 = A_1 \mathrm{e}^{ik\frac{x^2+y^2}{2s}}$

出射波前函数 $\tilde{U}_2 = \tilde{U}_1 \tilde{t}_p = A_1 e^{ik\frac{x^2+y^2}{2s}} e^{-ik(n-1)(\alpha_1 x+\alpha_2 y)}$

$$= A_1 e^{ik[\frac{x^2+y^2}{2s} - \frac{(n-1)s(\alpha_1 x+\alpha_2 y)}{s}]}$$ ⟶ 波前函数标准化

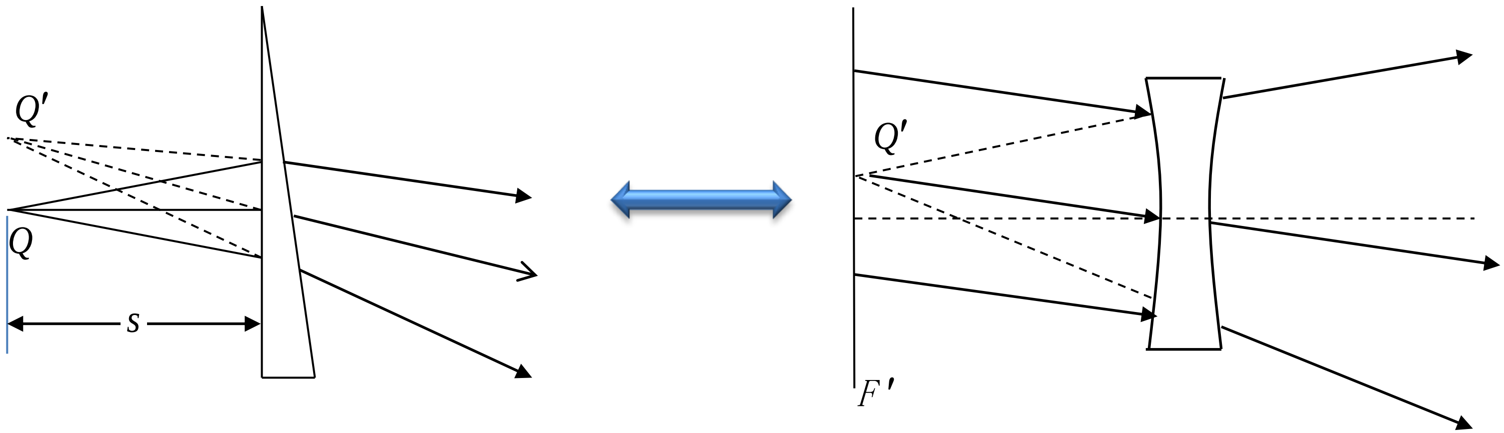
对比轴外物点发散球面波的相因子表达式 $\exp[ik(\frac{x^2+y^2}{2z} - \frac{xx_0+yy_0}{z})]$

可以得到出射波前函数代表的是从轴外点源发出的发散球面波，点源Q'的位置为

$$\begin{cases} x' = (n-1)\alpha_1 s \\ y' = (n-1)\alpha_2 s \\ z = s \end{cases}$$

5.1.4 相位衍射元件的位相变换函数及分析

棱镜的相位变换的一种等效观点



以另一种思路考虑棱镜的相位变换函数，将相因子对调：

$$\tilde{U}_2 = A_1 e^{-ik(n-1)(\alpha_1 x+\alpha_2 y)} \cdot e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2(-s)}} = \tilde{U}_{el} \cdot \tilde{t}_{eL}$$

可以认为是一个焦距为-s的发散透镜，作用于一束偏向角为$\{(n\text{-}1)\alpha_1,\ (n\text{-}1)\alpha_2\}$的平面波，最终形成一束从$Q'$点发散的球面波。

5.1.4 相位衍射元件的位相变换函数及分析

傅里叶变换光学的总结

具体来说，对图像产生的复杂波前的傅里叶分析，其内容和特点主要包括以下几点：

- 出发点：二维波前决定三维波场，其特征主要体现在波前函数的相位因子上；
- 根据波前函数的相因子，可以判断波场的类型，分析其衍射场的主要特征。
- 傅里叶变换光学将复杂的衍射场分解为一些列不同方向、不同振幅的平面衍射波。
- 特定方向的平面衍射波作为一种载波，携带特定空间频率的光学信息。

- 分析光信息—空间频谱的语言
- 处理光信息—改变频谱的手段
- 像质评价—频谱被改变的眼光

本节重点

1. 衍射系统和屏函数的概念（理解）
2. 平面波和球面波的相因子表示法（记忆）
3. 透镜和棱镜的相因子、透射函数及其作用（计算）

作业

P52-1,2,3

重排版：P293-1，2，3