第五章 傅里叶变换光学

第二节 正弦光栅的衍射

5.2 正弦光栅的衍射

5.2.1 空间频率的概念

5.2.2 正弦光栅及其衍射图样

5.2.3 任意光栅的屏函数及其傅里叶展开

5.2.4 夫琅禾费衍射的再认识

5.2.1 空间频率的概念

时间频率

时间频率指信号随时间的周期性变化（简谐振动）。

$$f(t+T)=f(t)$$ 谐波

时间周期： T mT

时间频率： $\nu=\frac{1}{T}$ $\nu_m=m\frac{1}{T}$

时间角频率： $\omega=2\pi\frac{1}{T}$ $\omega_m=m2\pi\frac{1}{T}$

空间频率

空间频率指某一面内光场随空间位置的周期性变化。

$$I(x+d)=I(x)$$

空间周期： d md

空间频率： $f=\frac{1}{d}$ $f_m=m\frac{1}{d}$

空间角频率： $q=2\pi\frac{1}{d}$ $q_m=m2\pi\frac{1}{d}$

波矢

频谱展开

周期信号 $f(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m e^{i\omega_n t},\quad a_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-i\omega_m t}dt$ 傅里叶级数—分立的谱线

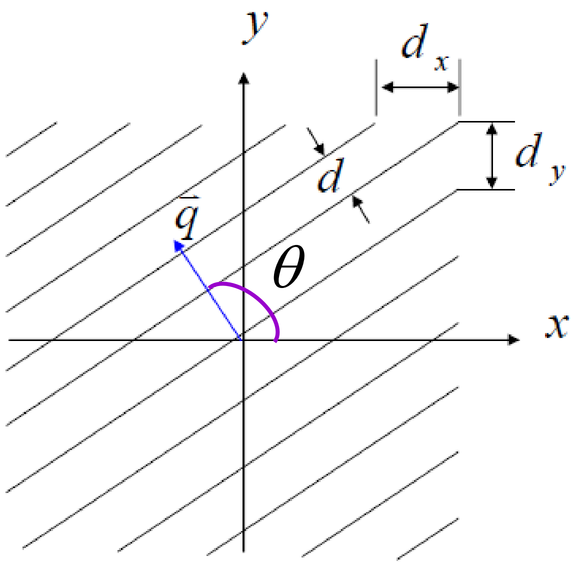
任意信号 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt,\quad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}dt$ 傅里叶变换—连续谱

物理意义：任意变化的信号可展开成一系列简谐振动的迭加。

5.2.1 空间频率的概念

空间频率的计算

$$\vec{q} = q_x\vec{e}_x + q_y\vec{e}_y = q\cos\theta\vec{e}_x + q\sin\theta\vec{e}_y$$



$$d_x = \frac{d}{\cos\theta} \qquad d_y = \frac{d}{\sin\theta}$$

$$d_x = \frac{2\pi}{q_x} = \frac{1}{f_x}$$

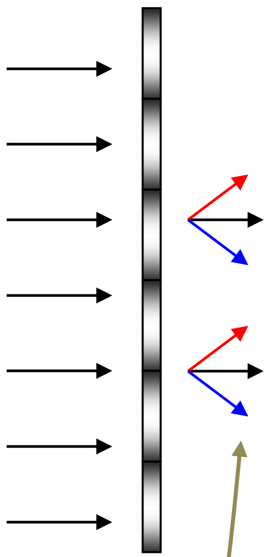
$$d_y = \frac{2\pi}{q_y} = \frac{1}{f_y}$$

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{d_x^2} + \frac{1}{d_y^2}$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{q_x^2 + q_y^2}} = \frac{1}{q}$$

5.2.2 正弦光栅及其衍射图样

正弦光栅的屏函数及对光场的作用



正弦光栅的屏函数 $\tilde{t}(x)=t_0+t_1\cos(2\pi fx+\varphi_0)$

若入射场为平行光正入射 $\tilde{U}_1(x)=A_1$

则透射场为： $\tilde{U}_2(x)=\tilde{U}_1(x)\tilde{t}(x)$

$$=A_1[t_0+t_1\cos(2\pi fx+\varphi_0)]$$

利用欧拉公式可得： $\cos(2\pi fx+\varphi_0)=\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{i(2\pi fx+\varphi_0)}+\mathrm{e}^{-i(2\pi fx+\varphi_0)}]$

因此 $$\tilde{U}_2(x)=A_1t_0+\frac{1}{2}A_1t_1\mathrm{e}^{i(2\pi fx+\varphi_0)}+\frac{1}{2}A_1t_1\mathrm{e}^{-i(2\pi fx+\varphi_0)}$$

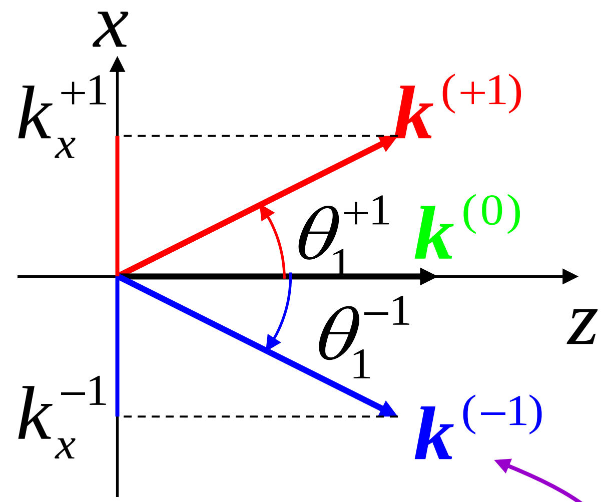
即 $$\tilde{U}_2(x)=\tilde{U}_0(x)+\tilde{U}_{+1}(x)+\tilde{U}_{-1}(x)$$

物理意义：正弦光栅将透射波变为三列**平面波**。

5.2.2 正弦光栅及其衍射图样

正弦光栅的三列衍射波的分析

三列透射波方向各不相同，以 $\tilde{U}_{+1}(x)=\frac{1}{2}A_1 t_1\,\mathrm{e}^{i(2\pi fx+\varphi_0)}$ 为例，分析其出射方向。其波矢为：



$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=k_x x+k_y y+k_z z=2\pi fx=k_x^{(+1)}x$$

即： $k_x^{(+1)}=2\pi f$ 由此可以得到

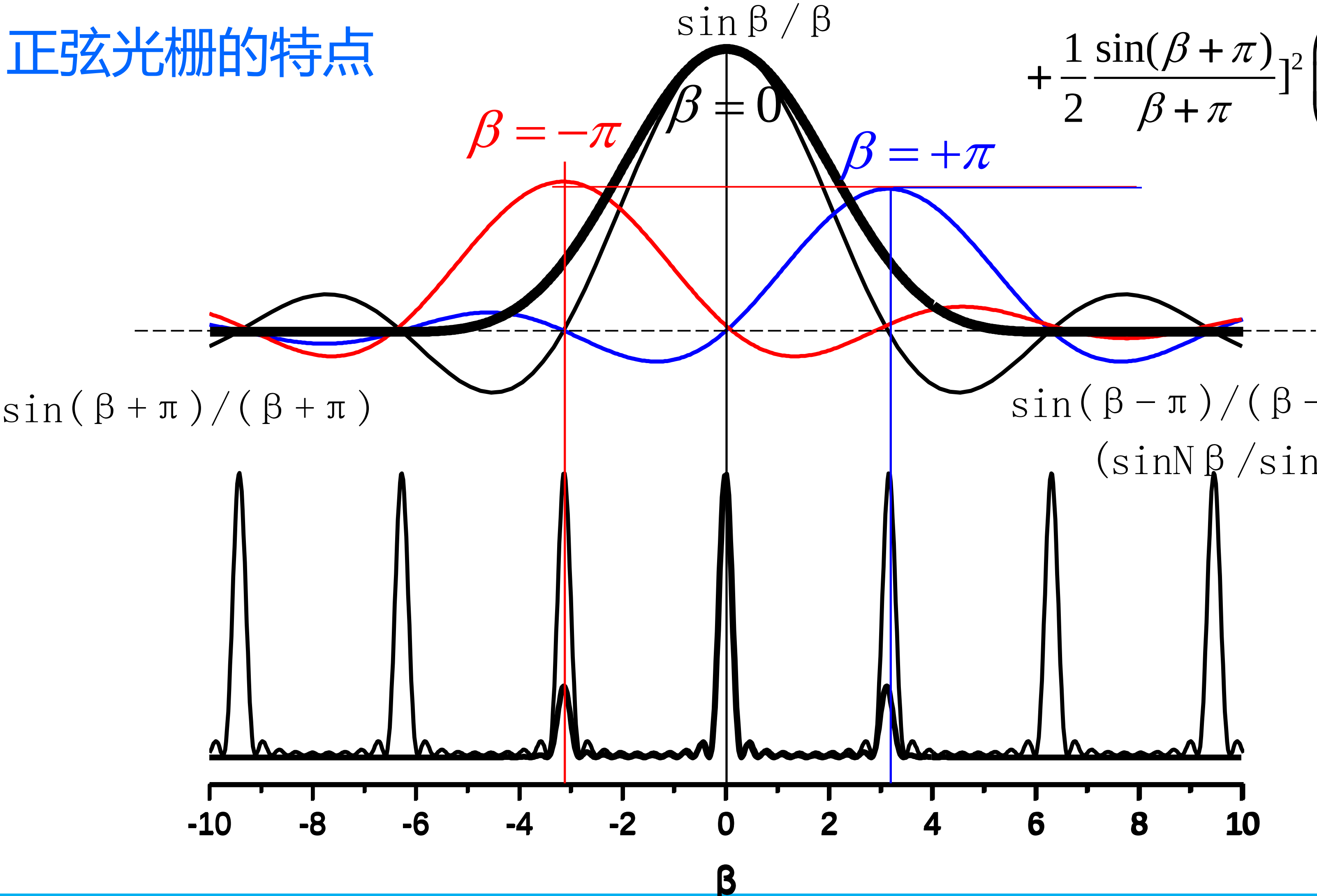
$$\sin\theta_1^{(+1)}=\frac{k_x^{(+1)}}{k^{(+1)}}=\frac{2\pi f}{\frac{2\pi}{\lambda}}=f\lambda$$

正弦光波衍射光场 $\tilde{U}_2(x)=A_1 t_0+\frac{1}{2}A_1 t_1\,\mathrm{e}^{i(2\pi fx+\varphi_0)}+\frac{1}{2}A_1 t_1\,\mathrm{e}^{-i(2\pi fx+\varphi_0)}$ 的三列出射光波

0级波	$\tilde{U}_0(x)=A_1 t_0$	方向	$\sin\theta_0=0$
+1级波	$\tilde{U}_{+1}(x)=\frac{1}{2}A_1 t_1\,\mathrm{e}^{i(2\pi fx+\varphi_0)}$	方向	$\sin\theta_1^{+1}=f\lambda$
-1级波	$\tilde{U}_{-1}(x)=\frac{1}{2}A_1 t_1\,\mathrm{e}^{-i(2\pi fx+\varphi_0)}$	方向	$\sin\theta_1^{-1}=-f\lambda$

正弦光栅的特点

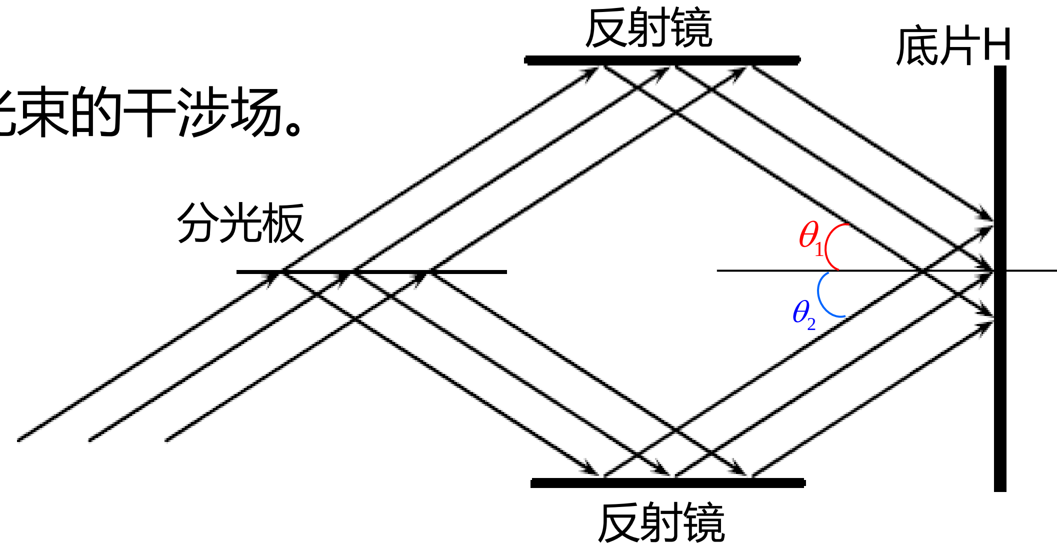
$$I(\theta)=I_0\left[\frac{\sin\beta}{\beta}+\frac{1}{2}\frac{\sin(\beta-\pi)}{\beta-\pi}+\frac{1}{2}\frac{\sin(\beta+\pi)}{\beta+\pi}\right]^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$



5.2.2 正弦光栅及其衍射图样

正弦光栅的制备方法

（1）利用照相底片记录两束平行光束的干涉场。



干涉强度的分布函数为：

$$I(x,y)=I_0[1+\gamma\cos(2\pi fx+\varphi_0)]$$

其空间频率

$$f=\frac{1}{d}=\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2}{\lambda}$$

（2）显影定影—线性冲印。 → 是制备的关键，与所用材料、曝光温度和时间、显影定影的药液配方等都有关系。

冲洗后干板底片的透过率函数为：$\tilde{t}(x,y)\propto I(x,y)$

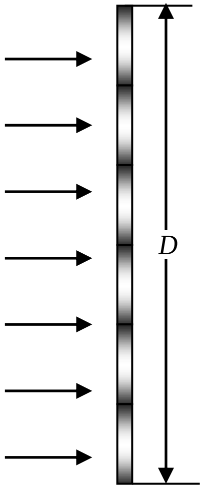
可写成： $\tilde{t}(x,y)=\alpha+\beta I(x,y)=t_0+t_1\cos(2\pi fx+\varphi_0)$

β<0，负片；β>0，正片；

雾底，物理意义表示即使曝光强度I=0，冲洗出来仍有一定透过率。

5.2.2 正弦光栅及其衍射图样

正弦光栅的有效宽度对其衍射场的影响



元件的有效宽度

窗函数

元件实际尺寸可以用一个孔型函数描述，称为窗函数。

$$\tilde{t}_w = \begin{cases} 1 & \text{窗口内} \\ 0 & \text{窗口外} \end{cases}$$

实际光学元件的屏函数应等于其完整的变换函数与窗函数的乘积，即 $\tilde{t}'_L = \tilde{t}_w \cdot \tilde{t}_L$

可以理解为首先经过一次完整的变换，再被窗函数的作用，使波前受限发生衍射，在相面上出现圆孔的夫琅禾费衍射场。

窗函数作用的物理意义

窗函数使衍射场波次发生展宽。

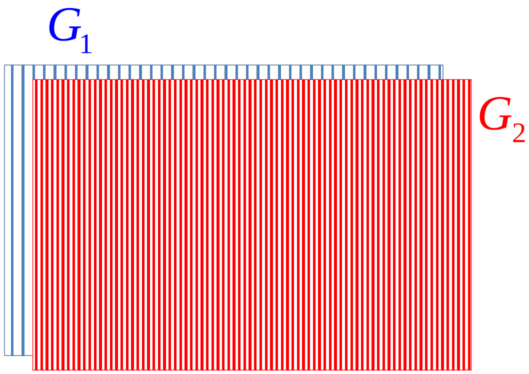
$$\begin{cases} \Delta\theta_0 = \dfrac{\lambda}{D} \\ \Delta\theta_{\pm 1} = \dfrac{\lambda}{D\cos\theta_{\pm 1}} \end{cases}$$

5.2.2 正弦光栅及其衍射图样

正弦光栅的组合

（1）平行密接（相乘）

分析思路：光波场依次通过不同的正弦光栅，总的变换函数等于各光栅的变换函数相乘。



入射场

正入射平面波 $\tilde{U}_1 = A_1$

变换函数

$$\begin{cases} G_1: t(x) = t_0 + t_1 \cos 2\pi f x & \text{低频} \\ G_2: t'(x) = t_0' + t_1' \cos 2\pi f' x & \text{高频} \end{cases}$$

$$t_{12}(x) = t(x) \cdot t'(x) = t_0 t_0' + t_0 t_1' \cos 2\pi f' x + t_1 t_0' \cos 2\pi f x + \frac{1}{2} t_1 t_1' \cos 2\pi (f + f')x + \frac{1}{2} t_1 t_1' \cos 2\pi (f - f')x$$

出射场

$$\tilde{U}_2(x, y) = \tilde{U}_1(x, y) \cdot \tilde{t}_{12}(x, y)$$

包含四个正弦光栅加一个直流分量

$$= A_1 [t_0 t_0' + \boxed{t_0 t_1' \cos 2\pi f' x} + \boxed{t_1 t_0' \cos 2\pi f x} + \frac{1}{2} \boxed{t_1 t_1' \cos 2\pi (f + f')x} + \frac{1}{2} \boxed{t_1 t_1' \cos 2\pi (f - f')x}]$$

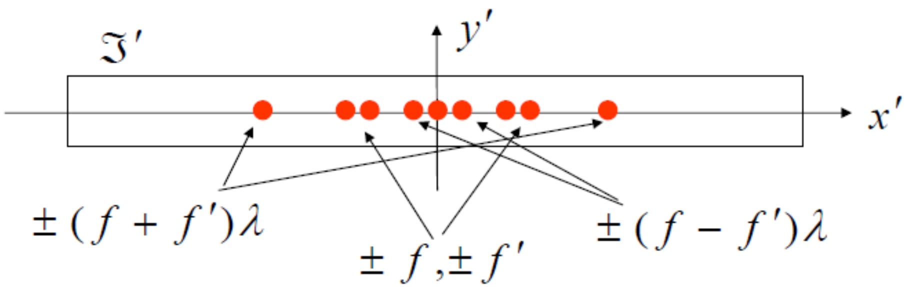
5.2.2 正弦光栅及其衍射图样

正弦光栅的组合

（1）平行密接（续）

将在x轴上出现9个衍射斑，方向角分别为

$$\sin\theta=\begin{cases}0 & (0级) \\ \pm f\lambda & (f的\pm1级) \\ \pm f'\lambda & (f'的\pm1级) \\ \pm(f-f')\lambda & (差频的\ \pm1级) \\ \pm(f+f')\lambda & (和频的\ \pm1级)\end{cases}$$

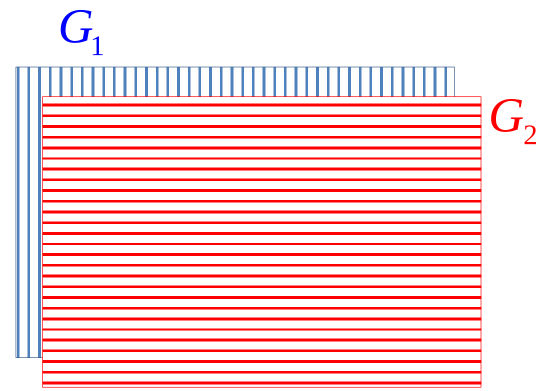


可以理解为入射光波长经过第一个光栅，分解为三列平面衍射波，其中每列波再经过第二个光栅，又分解为三个波列。因此，共有9个波列。

5.2.2 正弦光栅及其衍射图样

正弦光栅的组合

（2）正交密接（相乘）



入射场

正入射平面波 $\tilde{U}_1 = A_1$

变换函数

$$\begin{cases} G_1 : t(x) = t_0 + t_1 \cos 2\pi fx \\ G_2 : t(y) = t_0' + t_1' \cos 2\pi f'y \end{cases}$$

$$t_{12}(x) = t(x) \cdot t'(y) = t_0 t_0' + t_0 t_1' \cos 2\pi f'x + t_1 t_0' \cos 2\pi fy + \frac{1}{2} t_1 t_1' \cos 2\pi (fx + f'y) + \frac{1}{2} t_1 t_1' \cos 2\pi (fx - f'y)$$

出射场

$$\tilde{U}_2(x,y) = \tilde{U}_1(x,y) \cdot \tilde{t}_{12}(x,y)$$

$$= A_1 [t_0 t_0' + t_0 t_1' \cos 2\pi f'x + t_1 t_0' \cos 2\pi fy + \frac{1}{2} t_1 t_1' \cos 2\pi (fx + f'y) + \frac{1}{2} t_1 t_1' \cos 2\pi (fx - f'y)]$$

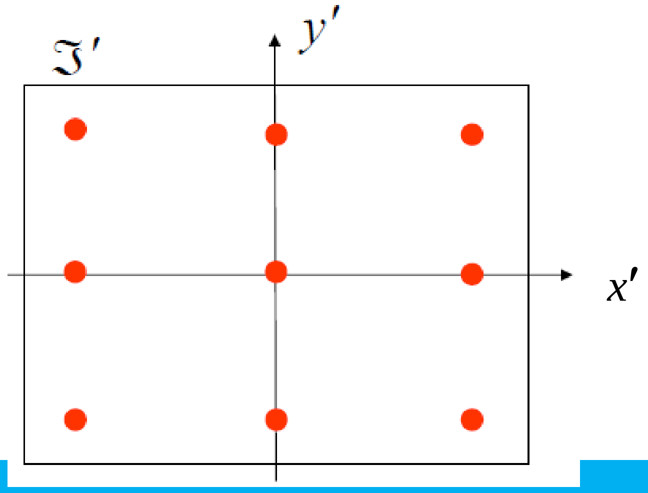
5.2.2 正弦光栅及其衍射图样

正弦光栅的组合

（2）正交密接(续)

光场分解结果—9个衍射光斑

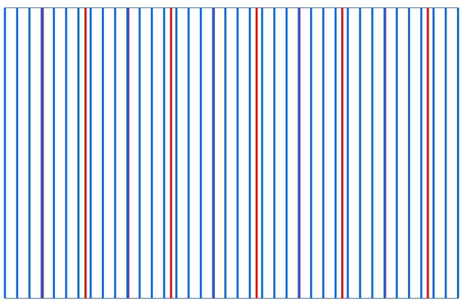
$$(\sin\theta_1,\sin\theta_2)=\begin{cases}(0,0) & (0\text{级})\\ (\pm f\lambda,0) & (f\text{的}\pm1\text{级})\\ (0,\pm f'\lambda) & (f'\text{的}\pm1\text{级})\\ \left.\begin{array}{l}\pm(f\lambda,-f'\lambda)\\ \pm(f\lambda,f'\lambda)\end{array}\right\} & \text{交叉项的}\pm1\text{级}\end{cases}$$



5.2.2 正弦光栅及其衍射图样

正弦光栅的组合

（3）复合光栅（相加）



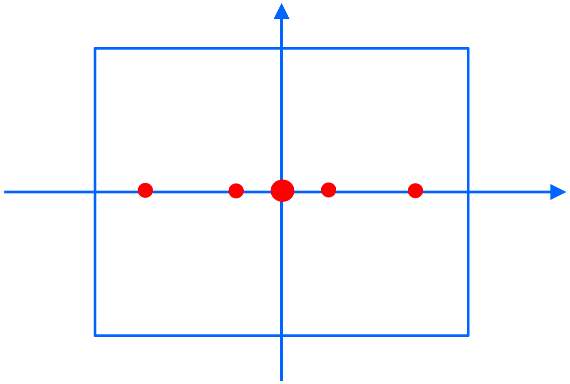
光栅含有两种不同空间频率的成分。

$$t(x)=t_0+t_1\cos 2\pi f_1 x+t_2\cos 2\pi f_2 x$$

出射光场

$$\tilde{U}_2(x,y)=\tilde{U}_1(x,y)\cdot\tilde{t}_{12}(x,y)=A_1(t_0+t_1\cos 2\pi f_1 x+t'\cos 2\pi f' x)$$

$$\begin{cases}\sin\theta_0=0 & (0\text{级})\\ \sin\theta_{\pm1}=\pm f\lambda & (f\text{的}\pm1\text{级})\\ \sin\theta'_{\pm1}=\pm f'\lambda & (f'\text{的}\pm1\text{级})\end{cases}$$



复合光栅的衍射光斑，$f'=3f$

复合光栅的制备方法

多次曝光一次冲洗。

5.2.3 任意光栅的屏函数及其傅里叶展开

任意光栅屏函数的傅里叶展开

空间周期函数的严格周期性 $\tilde{t}(x+d)=\tilde{t}(x)$

实际中会有窗函数的限制。在较大范围内具有周期性的函数被称为准周期函数。

处理思路：先将变换函数作为严格周期函数处理，必要时才考虑窗函数的影响。

严格周期函数展开的三种模式

（1）正余弦展开

$$t(x)=t_0+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos 2\pi f_m x+\sum_{m=1}^{\infty}b_m\sin 2\pi f_m x$$

f_1 – 基频

$f_m = mf$ – m次谐波

$$t_0=\frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2}t(x)dx$$

$$a_m=\frac{2}{d}\int_{-d/2}^{d/2}t(x)\cos 2\pi f_m xdx \qquad b_m=\frac{2}{d}\int_{-d/2}^{d/2}t(x)\sin 2\pi f_m xdx$$

5.2.3 任意光栅的屏函数及其傅里叶展开

任意光栅屏函数的傅里叶展开

（2）余弦相移式

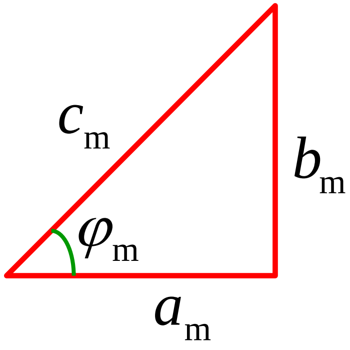
$$t(x)=t_0+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos 2\pi f_m x+\sum_{n=1}^{\infty}b_m\sin 2\pi f_m x$$

$$=t_0+\sum_{m=1}^{\infty}\sqrt{a_m^2+b_m^2}\left(\frac{a_m}{\sqrt{a_m^2+b_m^2}}\cos 2\pi f_m x+\frac{b_m}{\sqrt{a_m^2+b_m^2}}\sin 2\pi f_m x\right)$$

$$=t_0+\sum_{m=1}^{\infty}c_m(\cos 2\pi f_m x\cos\varphi_m+\sin 2\pi f_m x\sin\varphi_m)$$

$$=t_0+\sum_{m=1}^{\infty}c_m\cos(2\pi f_m x+\varphi_m)$$

$$c_m=\sqrt{a_m^2+b_m^2}\qquad \varphi_m=\tan^{-1}\frac{b_m}{a_m}$$



5.2.3 任意光栅的屏函数及其傅里叶展开

任意光栅屏函数的傅里叶展开

（3）傅里叶级数展开

$$t(x)=t_0+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos 2\pi f_m x+\sum_{n=1}^{\infty}b_m\sin 2\pi f_m x$$

$$=t_0+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\left(\frac{e^{i2\pi f_m x}+e^{-i2\pi f_m x}}{2}\right)+\sum_{m=1}^{\infty}b_m\left(\frac{e^{i2\pi f_m x}-e^{-i2\pi f_m x}}{2i}\right)$$

$$=t_0+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m-ib_m}{2}e^{i2\pi f_m x}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m+ib_m}{2}e^{-i2\pi f_m x}$$

$$=t_0+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_m^2+b_m^2}}{2}e^{i2\pi f_m x-i\varphi_m}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_m^2+b_m^2}}{2}e^{-i2\pi f_m x+i\varphi_m}$$

$$=t_0+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_m^2+b_m^2}}{2}e^{i(2\pi f_m x-\varphi_m)}+\sum_{m=-1}^{-\infty}\frac{\sqrt{a_m^2+b_m^2}}{2}e^{i(2\pi f_m x-\varphi_m)}$$

$$=t_0+\sum_{m\neq 0}\frac{\sqrt{a_m^2+b_m^2}}{2}e^{i(2\pi f_n x-\varphi_m)}=t_0+\sum_{m\neq 0}\tilde{t}_m e^{i2\pi f_m x}$$

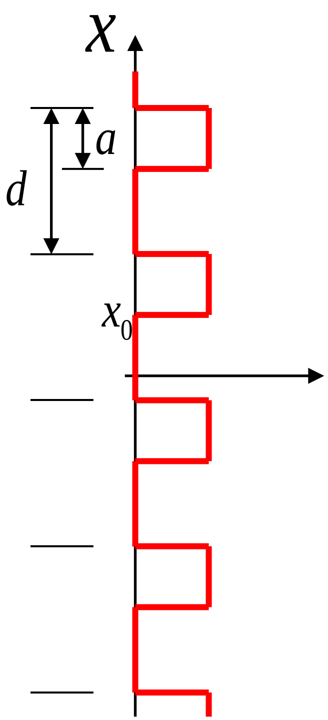
其中 $\tilde{t}_m=\frac{c_m}{2}e^{-i\varphi_m}=t_m e^{-i\varphi m}=\frac{a_m-ib_m}{2}$　　$\tilde{t}_m=\frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2}t(x)e^{-i2\pi f_m x}dx$

当然也可以由余弦表达式和欧拉公式很简洁的得到复数表达式，此处推导的目的在于说明正弦余弦表达式更为基本。

5.2.3 任意光栅的屏函数及其傅里叶展开

黑白光栅屏函数的傅里叶展开

光栅常数为 d，透射缝宽为 a 的黑白光栅，其屏函数为：



$$t(x)=t(x+d)=\begin{cases}1, x_0+md<x<x_0+a+md \\ 0, x_0+a+md<x<x_0+(m+1)d\end{cases}$$

使用正余弦展开

$$t(x)=t_0+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos 2\pi f_m x+\sum_{m=1}^{\infty}b_m\sin 2\pi f_m x$$

$$t_0=\frac{1}{d}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\mathrm{d}x=\frac{a}{d} \qquad b_m=\frac{2}{d}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\sin(2\pi f_m x)\mathrm{d}x=0$$

$$a_m=\frac{2}{d}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\cos(2\pi f_m x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi f_m d}\sin(2\pi f_m x)\Big|_{-a/2}^{a/2}$$

$$=\frac{2\sin(\pi f_m a)}{\pi f_m d}=\frac{a}{d}\frac{2\sin\frac{m\pi a}{d}}{\frac{m\pi a}{d}}$$

5.2.3 任意光栅的屏函数及其傅里叶展开

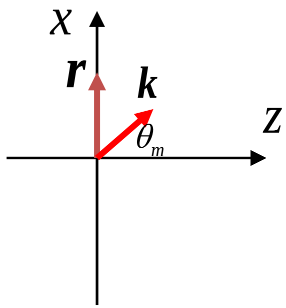
黑白光栅屏函数的傅里叶展开（续）

$$t(x)=t_0+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos 2\pi f_m x+\sum_{m=1}^{\infty}b_m\sin 2\pi f_m x$$

$$=\frac{a}{d}+\frac{a}{d}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2\sin\frac{m\pi a}{d}}{\frac{m\pi a}{d}}\cos 2\pi f_m x=\frac{a}{d}+\frac{a}{d}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2\sin\frac{m\pi a}{d}}{\frac{m\pi a}{d}}\frac{e^{i2\pi f_m x}+e^{-i2\pi f_m x}}{2}$$

$$=\frac{a}{d}+\frac{a}{d}\sum_{m\neq 0}\frac{\sin\alpha_m}{\alpha_m}e^{i2\pi f_m x}$$ 其中 $\alpha_m=\dfrac{m\pi a}{d}$

0级波　　m级波



平面波的相位 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{k}_x\cdot x=\dfrac{2\pi}{\lambda}\sin\theta_m\cdot x=2\pi f_m x$

m 级波的方向 $\sin\theta_m=\lambda f_m=\lambda\dfrac{m}{d}\Rightarrow d\sin\theta_m=m\lambda$　光栅方程

$$\alpha_m=\frac{m\pi a}{d}=\frac{\pi a\sin\theta_m}{\lambda}\Rightarrow\frac{\sin\alpha_m}{\alpha_m}$$ 单缝衍射因子

5.2.3 任意光栅的屏函数及其傅里叶展开

黑白光栅屏函数的傅里叶展开（续）

例

如果$d=2a$ ，平面波入射，求衍射场。

$$f=1/d$$

$$\tilde{U}_2(x)=\tilde{U}_1(x)t(x)=A_1\frac{a}{d}(1+\sum_{m\neq 0}\frac{\sin m\pi fa}{m\pi fa}e^{i2\pi mfx})=\frac{A_1}{2}(1+\sum_{m\neq 0}\frac{\sin\frac{m\pi}{2}}{\frac{m\pi}{2}}e^{i2\pi mfx})$$

$$=\frac{A_1}{2}+\frac{A_1}{\pi}(e^{i2\pi fx}+e^{-i2\pi fx})-\frac{A_1}{3\pi}(e^{i6\pi fx}+e^{-i6\pi fx})+\frac{A_1}{5\pi}(e^{i10\pi fx}+e^{-i10\pi fx})-\cdots$$

$$=\frac{A_1}{2}+\frac{2A_1}{\pi}\cos 2\pi fx-\frac{2A_1}{3\pi}\cos 2\pi\cdot 3fx+\frac{2A_1}{5\pi}\cos 2\pi\cdot 5fx-\cdots$$

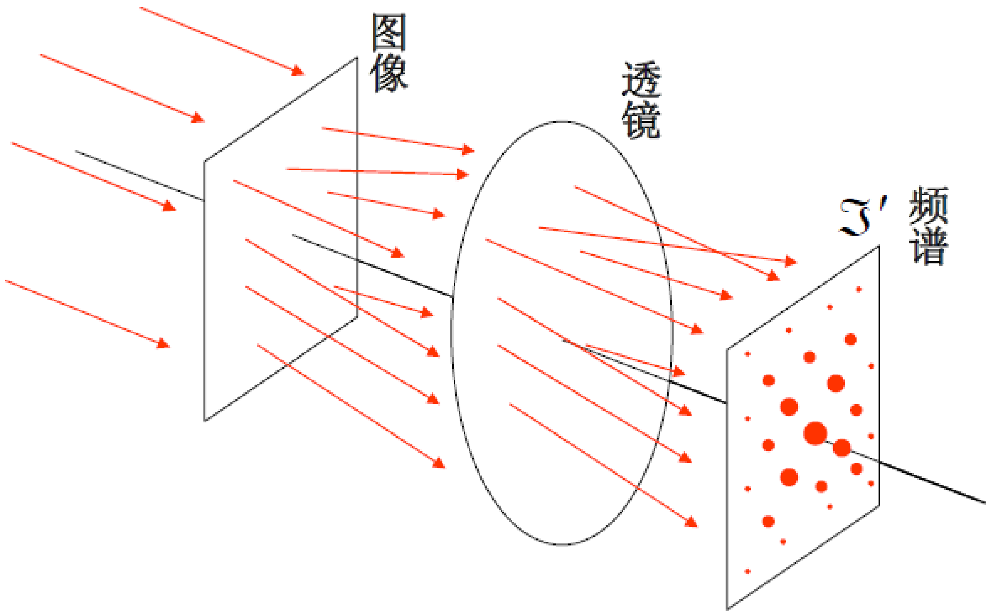
2、4、... 缺级

黑白光栅可以看做无穷多级正弦光栅的叠加。

5.2.4 夫琅禾费衍射的再认识

傅里叶分解的数学计算需要有对应的物理装置来实现

Fraunhofer衍射是衍射屏空间频率的频谱分析器—将一定空间频率的信息分解为一对特定方向的平面衍射波，在远场分离。



傅氏面

透镜后焦面的衍射光斑

—图像的单频信息

- 角度∝频率分量的高低
- 频率∝ $\tilde{t}_m{}^2$(傅里叶系数的平方)

Fraunhofer衍射系统成为傅里叶分析器的条件

(1) 线性系统

(2) 本征信息与傅里叶分解一致

可用于进行光学计算

5.2.4 夫琅禾费衍射的再认识

过高频信息产生的衰逝波

$$k_x = k\sin\theta, k_z = k\cos\theta$$

当 $\sin\theta = f\lambda > 1$ 时

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} = i\kappa$$

其中：$\kappa = \sqrt{(f\lambda)^2 - 1}$

$$\widetilde{U}(x,y,z) = Ae^{-\kappa z}e^{i2\pi fx}$$

沿z方向衰减，衰失波

从傅里叶变换的角度理解：

- 用波长为λ的光波对图像进行分析，无法在衍射场中得到空间频率 $f > 1/\lambda$ 的信息。
- 也就是说，用衍射方法分析图像结构的空间分辨率只能达到照明光波的波长量级。
- 因此用X射线能够更精细的分析物质结构。

本节重点

1. 空间频率的概念（理解）
2. 正弦光栅的屏函数及对光场的作用（计算）
3. 任意光栅屏函数的傅里叶展开（计算）

作业

P67-2,4,7,9

重排版：P304-2，4，7，9