动力系统中若干回复性问题的新进展

叶向东　邵松

中国科学技术大学数学系

2016 年 4 月 19 日

摘要

回复属性是动力系统研究的核心内容之一。在本综述中我们将讨论拓扑动力系统回复属性研究的一些新进展，主要侧重于与多重回复性、Bohr 问题、乘积回复性、Furstenberg不交性问题等相关的一些主题。我们的主要目的是简要介绍最近相关问题的研究进展，给出与之相关的参考文献，并且陈述一些未解决的问题。

1　引言

在本综述中，我们主要讨论拓扑动力系统中的若干与回复性相关的问题[1]。*拓扑动力系统*是指二元组(X,T), 其中X 是一个紧致度量空间，T 为其上的一个连续满的自映射。*保测系统* 是指四元组$(X,\mathcal{X},\mu,T)$, 其中$(X,\mathcal{X},\mu)$ 是Lebesgue 概率空间，$T:X\to X$ 为可逆保测变换。

关于更多动力系统的概念和背景知识，请读者参见[1, 2, 24, 26, 86, 85]。相关的综述性文章可以参见[7], [36], [39], [8], [77] 和[70]等。

1.1　回复性

动力系统主要描述几何空间中的一个点随着时间变化的规律，研究未来的状态如何依赖于当前状态。如果一个状态随着时间的演变不再出现，那么很多情况下这个状态是研究中不太关心的。而那些随着时间演变能够经常出现的状态，就是动力系统中的回复点。现代动力系统研究中的回复性可以追溯到著名的法国数学家Poincaré 的工作。为了研究N 体问题，Poincaré 发展了许多全新的数学工具。例如，他完整地提出了不变积分(invariant integrals) 的概念，并且使用它证明了著名的回复定理(Poincaré recurrence theorem)；另一个例子是他为了研究周期解的行为，引进了首次回复映射(first return map) 的概念，在后来的动力系统理论中也被称为Poincaré 映射。

用现代动力系统的术语来描述，*Poincaré 回复定理*可以如下论述：设$(X,\mathcal{X},\mu,T)$ 为保测系统，那么对于任何具有正测度的集合$A\in\mathcal{X}$，一定存在充分大的时间n 使得$\mu(A\cap T^{-n}A)>$

[1]在文章中我们主要研究离散动力系统，偶尔会涉及一般群作用下的动力系统，它们的定义是类似的，我们不再重新论述。

0. 如果空间X 还具有拓扑结构使得T 连续，那么根据Poincaré 回复定理容易证明：对于μ 几乎所有点为回复点，即对μ 几乎所有点$x \in X$, 存在序列$n_i \nearrow \infty$ 使得$T^{n_i}x \to x, i \to \infty$. 因为任何拓扑动力系统$(X,T)$ 可以赋予测度结构使之成为保测系统，那么根据上面结果就有：任何拓扑动力系统中必存在回复点！这就是著名的*Birkhoff* 回复定理。注意Birkhoff 回复定理对于任何拓扑群作用的拓扑动力系统都是成立的，此时的证明需要运用Zorn 引理[41]。

根据Poincaré 回复定理和Birkhoff 回复定理，回复性是动力系统中广泛存在的现象。在回复属性中，最强的是不动点，也就是说这个状态永远不变（即$T^n x = x, \forall n$）。其次是周期点，它表明这个状态周期性地出现（即存在$n \in \mathbb{N}$ 使得$T^n x = x$）。如果一个点的回复性与周期点类似，也就是说对于它的任何邻域，它回到这个邻域的时间集合具有有界性（对于周期点，这个时间集合恰为形如$M\mathbb{Z}$ 的集合，$M \in \mathbb{N}$），那么我们称这个点是几乎周期的。周期点的轨道是个有限集合，而非周期的几乎周期点的轨道闭包是一个不可数集合，这个轨道闭包构成的动力系统我们称之为极小系统，它可以具有非常丰富的动力学性质[5, 18]。一个点是回复点要求它轨道中的点不时回到这个点附近。如果对于一个点我们只要求它附近的点有一定的回复性，那么就有所谓的非游荡性、链回复性等概念。不动点、周期点、几乎周期点（极小点）、回复点、非游荡点、链回复性点等都是重要的概念，关于它们有着非常丰富的结果，我们在本文中不侧重于研究这些点集和它们之间的关系，感兴趣的读者可以参见相关的论著，例如[1, 85].

在本文中我们介绍的是一些较为特殊的回复性质：多重回复性、乘积回复以及相关的Bohr 问题、Furstenberg 不交问题等。

1.2 多重回复性

多重回复性的研究始于Furstenberg 将动力系统方法运用到组合数论中的工作。关于这个主题极佳的读物是Furstenberg 的著作[26]。

van der Waerden 在1927 年给出了如下著名的定理：自然数的任何有限剖分，其中必存在一个剖分元包含了任意长的等差数列。之后这种Ramsey 类型的问题得到数学家的深入研究。例如，在[21] 中，Erdös 和Turán 提出了蕴含van der Waerden 定理的一个猜测：正密度的自然数子集包含了任意长的等差数列。这个问题最终在1975 年被Szemerédi 解决[79]，现在一般把这个结果称为Szemerédi 定理。这是Szemerédi 于2012 年获Abel 奖的主要工作之一。1977 年Furstenberg [25] 给出了Szemerédi 定理的动力系统证明，他证明了Szemerédi 定理实际上等价于动力系统中的多重Poincaré 回复定理！由此开创了遍历Ramsey 理论，这是Furstenberg 获2007 年Wolf 奖的主要工作之一。结合Furstenberg 证明的思想，Green 和Tao 解决了一个古老的数论问题[42]：素数包含任意长的等差数列。

在1978 年，Furstenberg 和Weiss 在文[32] 运用拓扑动力系统的方法研究了组合数论中的一些问题。在这篇文章中，他们将van der Waerden 定理等价于多重Birkhoff 回复定理，从而给出了van der Waerden 定理的动力系统证明。多重Birkhoff 回复定理如下陈述：设(X,T) 为动力系统，$d \in \mathbb{N}$，那么存在点$x \in X$ 和$\mathbb{N}$ 的递增序列$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得$T^{jn_k}x \to x, k \to \infty, \forall j = 1, 2, \dots, d$. 当$d = 1$, 就是Birkhoff 回复定理。

动力系统方法的优势在于可以将结论系统推广到更为一般的情况：高维的推广；多项式

时间的回复；IP 时间的回复；包括组合词在内的一般半群作用等等。这些结论的动力系统证明具有一定的统一性，而它们的组合证明就显得困难很多，甚至有些至今还没有相应的组合证明。我们在本文中会介绍一些基本的定理和新的进展，并给出一些问题。

关于拓扑的和测度的多重回复性质可以参见Bergelson 的综述性文章[7], 在那里读者可以找到对这个主题较为全面的介绍和大量的参考文献。

1.3 Bohr 问题

Bohr 问题是一个调和分析和动力系统中长时间未解决的公开问题：对于一个syndetic 的整数子集S（也称为相对稠密子集，指这个整数集合相邻元素间隔是有界的），差集$S-S=\{a-b:a,b\in S\}$ 是否包含了等度连续系统（也称为一阶幂零系统）的回复时间集（这个时间集称为Bohr$_0$ 集）。由于等度连续系统的回复时间集相当于整数加群在Bohr 紧化下零元素的一个邻域，人们将这个问题称为Bohr 问题。可以证明Bohr 问题能表述为如下更为直观的形式[63]：$S-S$ 是否包含了环面旋转系统单位元到自身邻域的回复时间集？Bohr 问题的研究至少可以追溯到Følner 的工作[23]，他证明了对于一个相对稠密的整数子集S，$S-S+S-S$ 为Bohr$_0$ 集。关于Bohr 问题目前最好的结果是1968 年Veech 给出的[81]，他证明了Bohr 问题至少“几乎”是成立的。具体讲，他证明了对每个相对稠密的整数子集S，它的差集$S-S$ 在忽略掉一个零密度集的时候包含了一个等度连续系统的回复时间集。Furstenberg、Weiss、Host、Kaztelneson 和Glasner 等著名数学家对这一问题都进行过深入的研究，但是还没有能够最终解决这个问题。这个问题与群论的联系参见[34, 61].

从多重回复定理的研究开始，动力系统和组合数论许多相关问题的研究重点开始由一阶幂零系统转移到高阶幂零系统，于是自然的问题就是如何提出并研究Bohr 问题的高阶对应问题。首先是如何合理的提出这个相应的高阶Bohr 问题。因为$S-S$ 可以看成是在S 中出现的长为2 的等差数列的公差全体，所以高阶Bohr 问题的一个自然提法为：在S 中出现长为k 的等差数列的公差的结构是什么样的？黄-邵-叶[56]发现这一问题与高阶幂零系统的回复时间集密切相关。我们将在文章中对相关结果进行介绍，说明多重回复时间集在其中所起的作用。

1.4 乘积回复

乘积回复的概念是由Furstenberg 在[26]中引入的。Furstenberg 引入族的方法来研究回复性，例如对于回复点，他将之与IP 集联系起来。Furstenberg 定义乘积回复如下：设(X,T) 为动力系统，点$x\in X$ 称为乘积回复的是指对于任何动力系统(Y,S) 的回复点y，点(x,y) 为乘积系统$(X\times Y,T\times S)$ 的回复点。乘积回复可以运用IP 集的对偶族去刻画，由此Furstenberg 证明了乘积回复性实际上等价于distality [26, Theorem 9.11]。之后，在文[6] 中Auslander 和Furstenberg 系统按照乘积回复的思想研究了回复性，并且把相应的结果推广到更一般的半群作用。例如，设半群E 作用在空间X 上，设F 为E 的闭子半群，那么定义点$x\in X$ 为F 回复的是指存在$p\in F$ 使得$px=x$，而称之为F 乘积回复的是指对于任何E 作用的动力系统Y 的F 回复点y，点(x,y) 为乘积系统$X\times Y$ 的F 回复点. 对于不同的F，就得到不一样的回复性质。乘积回复也在[19] 中得到系统研究。

在[6] 中，Auslander 和Furstenberg 提了下面问题：如果对于任何极小点y, (x, y) 是回复的，那么x 是否为distal 点？这样的点称为弱乘积回复点。在[47, 16, 76] 中，作者进行系统研究。事实上在Furstenberg 和Auslander 提出这个问题的时候，Furstenberg 没有意识到早在他之前的工作中就已回答了这个问题。而他的这个答案出现在他关于动力系统不交性的研究中。在最近的工作中[40]，作者在假设x为极小点的条件下也给出了否定的回答。

1.5 Furstenberg不交问题

系统不交性(disjointness) 的概念是由著名数学家Furstenberg 于1967 年在其经典文章[24]中首先引入的，它是描述系统复杂性差异的十分重要而基本的概念。现在它已经成为动力系统最核心的概念之一[35]。

两个系统是不交的类似于数论中两个自然数是互素的。关于遍历理论中不交性理论的近期发展参见[35]。不交性理论在拓扑动力系统中的研究发展较为缓慢，并且大多数情况下人们只是得到特定系统之间不交的充分条件。在[24]中Furstenberg 提出了许多问题，目前大部分已经解决，没有得到完全解决的问题之一为：刻画与所有极小系统不交的系统！这个问题也称为*Furstenberg* 不交性问题。我们在本文中将围绕着不交性介绍这个问题的最新进展，参见[60, 75, 17, 71]。

2 预备知识

2.1 基本概念与符号

在本文中，我们分别用$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ 和$\mathbb{N}$ 表示整数集合，非负整数集合以及自然数集合。

设(X, T) 为拓扑动力系统. 子集$Y \subseteq X$ 称为不变的是指$TY \subseteq Y$. 对于任何非空闭的不变子集Y, 根据定义$(Y, T|_Y)$ 也是一个动力系统，把它称为(X, T) 的*子系统*。子系统$(Y, T|_Y)$ 一般也记为(Y, T)。

设(X, T) 和(Y, S) 为两个系统, 二者的*乘积系统* $(X \times Y, T \times S)$ 定义为

$$T \times S(x, y) = (Tx, Sy), \quad \forall x \in X, y \in Y.$$

类似的，我们可以定义任何多系统的乘积系统。对于有限的乘积系统，我们也用$(X^n, T^{(n)})$来记n 重的乘积系统$(X \times \cdots \times X, T \times \cdots \times T)$. 设$(X, T)$ 和(Y, S) 为两个系统。连续映射$\pi : X \to Y$ 称为*同态*（*homomorphism*） 或*因子映射*（*factor map*)，是指它为满射并且$\pi \circ T = S \circ \pi$. 此时我们称$(X, T)$ 为(Y, S) 的*扩充*（*extension*)，而称(Y, S) 为(X, T) 的*因子*（*factor*)。

一个拓扑动力系统(X, T) 称为是*传递的*（*transitive*)，是指对于任何非空开集U 和V, 碰撞时间集$N(U, V) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : T^{-n}V \cap U \neq \emptyset\}$ 为无穷集合。称系统为*完全传递的*（*totally transitive*)，是指对于每个$n \in \mathbb{N}$，系统(X, T^n) 为传递的。而称一个系统为*弱混合*（*weakly mixing*)，是指乘积系统$(X \times X, T \times T)$ 是传递的。

设(X,T) 为拓扑动力系统以及点$x\in X$, 称集合$\mathrm{orb}(x,T)=\{x,Tx,T^2x,\ldots\}$ 为点x 的*轨道(orbit)*. 给定一个点，它的轨道闭包自然成为一个闭不变子集，于是可以看成一个子系统。这个简单的事实是从一个给定系统构造新系统的常用方法。如果在系统中存在一个点$x\in X$ 具有稠密的轨道，那么称这个点是*传递点(transitive point)*, 等价的，一个点x 是传递点当且仅当对于任何非空开集$U\subset X$，集合$N(x,U)=\{n\in\mathbb{Z}_+ : T^nx\in U\}$ 为无限集。一个点$x\in X$ 称为是*回复点* 或*回归点(recurrent point)*, 是指对于x 的任何邻域U，集合$N(x,U)=\{n\in\mathbb{Z}_+ : T^nx\in U\}$ 是无限集。全体传递点集合和全体回复点集合分别记为Tran_T 和$R(X,T)$. 一个熟知的结果是，对于任何回复点，它的轨道闭包作为子系统是一个传递系统；而对于传递系统，传递点全体组成的集合Tran_T 是稠密的G_δ 子集。

一个系统(X,T) 称为*极小的*（*minimal*） 指$\mathrm{Tran}_T=X$。易证明一个系统是极小的当且仅当它没有非平凡的子系统。一个点$x\in X$ 称为是*极小点*（*minimal point*） 或*几乎周期点*（*almost periodic point*），指$(\overline{\mathrm{orb}(x,T)},T)$ 为(X,T) 的极小子系统。如果存在$n\in\mathbb{N}$ 使得$T^nx=x$，那么我们称点$x\in X$ 为*周期点*（*periodic point*）。(X,T) 的全体周期点集合和全体极小点集合分别记为$Per(T)$ 和$AP(T)$。

设(X,T) 为动力系统，称之为

- *P 系统* 是指它为传递的并且周期点集合在全空间稠密;
- *M 系统* 是指它为传递的并且极小点集合在全空间中稠密;
- *E 系统* 是指它为传递的并且存在一个T 不变的Borel 概率测度μ 使得它的支撑为全空间，即$\mathrm{supp}(\mu)=X$;
- *F 系统* 是指它为完全传递的并且周期点集合在全空间中稠密;
- *scattering 系统* 是指对于任何极小系统(Y,S)，乘积系统$(X\times Y,T\times S)$ 为传递的.

P 系统、M 系统和E 系统的概念在[38] 引入；F 系统的概念在[26] 引入；而scattering 这个概念是在[11] 中引入的。

设(X,T) 为动力系统。称点对$(x,y)\in X^2$ 为*邻近对(proximal)* 是指它满足

$$\liminf_{n\to+\infty} d(T^nx,T^ny)=0;$$

称它为*distal 对* 是指它不是邻近的。记(X,T) 全体邻近点对的集合为$P(X,T)$。一个点x 称为是*distal 点*，是指对于x 轨道闭包中除了x 自己没有点和它组成邻近对. 一个系统(X,T) 称为是*distal 的*，是指对于任何不同的点$x,x'\in X$，(x,x') 为distal 对。

2.2 Furstenberg 族

首先我们介绍关于Furstenberg 族的基本概念(关于更多深入的内容请参见[2, 26]). 在本节中，我们只对$\mathbb{Z}_+$ 进行定义，所有概念可以推广到$\mathbb{Z},\mathbb{N}$ 等上。

设$\mathcal{P}=\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ 为$\mathbb{Z}_+$ 全体子集组成的集合. 族 (或Furstenberg 族) $\mathcal{F}$ 是指$\mathcal{P}$ 满足遗传向上性的子集，所谓遗传向上（hereditary upwards）是指如果$F_1\subset F_2$ 并且$F_1\in\mathcal{F}$，那么我们有$F_2\in\mathcal{F}$. 一个族$\mathcal{F}$ 称为真的（*proper*） 是指它为$\mathcal{P}$ 非平凡的子集，亦即非空集也非$\mathcal{P}$ 本身. 根据定义，一个族$\mathcal{F}$ 为真的当且仅当$\mathbb{Z}_+\in\mathcal{F}$ 并且$\emptyset\notin\mathcal{F}$.

$\mathcal{P}$ 的任何子集$\mathcal{A}$ 都可以生成一个族$[\mathcal{A}]=\{F\in\mathcal{P}:$ 存在$A\in\mathcal{A}$ 使得$F\supset A\}$. 对于族$\mathcal{F}$, 它的对偶族（*dual family*） 定义为

$$\mathcal{F}^*=\{F\in\mathcal{P}:\mathbb{Z}_+\setminus F\notin\mathcal{F}\}=\{F\in\mathcal{P}:F\cap F'\neq\emptyset\ \forall F'\in\mathcal{F}\}.$$

易见，$\mathcal{F}^*$ 也为族；它为真的当且仅当$\mathcal{F}$ 是真的。容易验证下面性质：

$$(\mathcal{F}^*)^*=\mathcal{F}\ \text{以及}\ \mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2\Longrightarrow\mathcal{F}_2^*\subset\mathcal{F}_1^*.$$

如果一个真族$\mathcal{F}$ 对于有限交运算是封闭的，那么$\mathcal{F}$ 称为滤子（*filter*）. 用$\mathcal{F}_{inf}$ 来记$\mathbb{Z}_+$ 的全体无穷子集组成的族，用$\mathcal{F}_{cf}$ 来记$\mathbb{Z}_+$ 的全体补集为有限集的子集组成的族。$\mathcal{F}_{cf}$ 为滤子。

设S 为$\mathbb{Z}_+$ 的子集. S 的上*Banach* 密度（*upper Banach density*） 和上密度（*upper density*） 分别定义为：

$$BD^*(S)=\limsup_{|I|\to\infty}\frac{|S\cap I|}{|I|}\ \ \text{以及}\ \ D^*(S)=\limsup_{n\to\infty}\frac{|S\cap[0,n-1]|}{n},$$

其中I 跑遍$\mathbb{Z}_+$ 的全体非空有限子集，$|\cdot|$ 表示集合的势. 用$\mathcal{F}_{pubd}$ 和$\mathcal{F}_{pud}$ 分别表示全体具有正的上Banach 密度和正的上密度子集组成的族。

$\mathbb{Z}_+$ 的子集S 称为*syndetic* 的 或相对稠密的 是指它具有有界的间距，即存在$N\in\mathbb{N}$ 使得对于任何$i\in\mathbb{Z}_+$ 我们有$\{i,i+1,\ldots,i+N\}\cap S\neq\emptyset$。称$S$ 为*thick* 的 是指它包含了任意长的区间，即对于任何$n\in\mathbb{N}$, 存在$a_n\in\mathbb{Z}_+$ 使得$\{a_n,a_n+1,\ldots,a_n+n\}\subset S$。称$S$ 为*piecewise syndetic* 的 是指它为某个syndetic 子集和某个thick 子集的交；称它为*thickly syndetic* 的是指对于任何$n\in\mathbb{N}$，存在A 的syndetic 子集$\{w_1^n,w_2^n,\ldots\}$ 使得对于每个i 我们有$\{w_i^n,w_i^n+1,\ldots,w_i^n+n\}\subset A$。分别用$\mathcal{F}_s$, $\mathcal{F}_t$, $\mathcal{F}_{ps}$ 和$\mathcal{F}_{ts}$ 来记全体syndetic 子集，全体thick 子集，全体piecewise syndetic 子集和全体thickly syndetic 子集组成的族。根据定义，容易看出$\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_s^*$，$\mathcal{F}_{ts}=\mathcal{F}_{ps}^*$。在这些族中，只有$\mathcal{F}_{ts}$ 为滤子[2, 26]。

设$\{p_i\}_{i=1}^\infty$ 为$\mathbb{Z}_+$ 序列. 有限和 定义为

$$FS(\{p_i\}_{i=1}^\infty):=\{p_{i_1}+p_{i_2}+\cdots+p_{i_k}:1\le i_1<i_2<\cdots<i_k,k\in\mathbb{N}\}.$$

子集$F\subset\mathbb{Z}_+$ 称为是*IP* 集合 是指它包含了某个有限和集合$FS(\{p_i\}_{i=1}^\infty)$. $\mathbb{Z}_+$ 的一个子集称为是*IP** 集合 是指它与任何IP 集合相交非空. 用$\mathcal{F}_{ip}$ 和$\mathcal{F}_{ip}^*$ 表示全体IP 集合和IP* 集合的族. 著名的Hindman 定理[48]告诉我们$\mathcal{F}_{ip}^*$ 是一个滤子(也可参见[26, p. 179]).

设(X,T) 为一个拓扑动力系统, $x\in X$，并且设U,V 为X 子集。记

$$N(x,U)=\{n\in\mathbb{Z}_+:T^nx\in U\},\quad N(U,V)=\{n\in\mathbb{Z}_+:U\cap T^{-n}V\neq\emptyset\}.$$

运用族可以刻画许多动力系统的性质。例如，

- Gottschalk-Hedlund 定理指出$x \in X$ 为极小点当且仅当对于x 的任何邻域U，$N(x,U) \in \mathcal{F}_s$ [41]。
- Furstenberg 指出$x \in X$ 为回复点当且仅当对于x 的任何邻域U，$N(x,U) \in \mathcal{F}_{ip}$; 点$x$ 为distal 点当且仅当对于x 的任何邻域U，$N(x,U) \in \mathcal{F}_{ip}^*$ (例如参见[26, Theorem 9.11] 或[17, Proposition 2.7].
- 系统(X,T) 为弱混合的当且仅当对于X 的任何非空开集U,V，我们有$N(U,V) \in \mathcal{F}_t$ (参见[26, 24])。
- 系统(X,T) 为E 系统当且仅当存在传递点$x \in X$ 使得对于x 的任何邻域U，$N(x,U) \in \mathcal{F}_{pubd}$ (参见[54, Lemma 3.6])。

2.3 幂零系统

2.3.1 幂零流形与幂零系统

设G 为群。对于$g,h \in G$, 记$[g,h] = g^{-1}h^{-1}gh$ 为g 和h 的交换子。用$[A,B]$ 表示由$\{[a,b] : a \in A, b \in B\}$ 生成的子群。归纳定义子群列G_j, $j \geq 1$ 如下：$G_1 = G$，以及$G_{j+1} = [G_j, G]$. 称G 为*d 阶幂零的* 是指存在$d \geq 1$ 使得G_{d+1} 为平凡群。

设G 为d 阶幂零Lie 群，Γ 为其离散的余紧（cocompact）子群. 于是得到紧致流形$X = G/\Gamma$，称之为*d 阶幂零流形（Nilmanifolds）*. 群G 可以通过左平移作用在X 上，我们将这个作用记为$(g,x) \mapsto gx$. G 上的Haar 测度μ 自然可以遗传到X 上，它为G 不变的。取定$\tau \in G$, 用T 表示X 上变换$x \mapsto \tau x$。那么(X,T,μ) 是一个唯一遍历的系统，称为*d 阶幂零系统（nilsystems）*.

我们常用的性质有：有限个d 阶幂零流形的乘积仍为d 阶幂零流形；d 阶幂零系统中任何一个点的轨道闭包仍然为幂零流形[68, Theorem 2.21]. 更多细节，请参见[15, 73]。

2.3.2 d 阶准幂零系统

我们需要研究幂零系统的逆极限，在这之前我们先回顾一下逆极限的概念。设$\{(X_i,T_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ 为系统序列，不妨取其上度量使得$diam(X_i) \leq M < \infty$。设对于每个$i$ 我们有因子映射$\phi_i : X_{i+1} \to X_i$。那么$\{(X_i,T_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的*逆极限系统* 定义为$\{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} : \phi_i(x_{i+1}) = x_i, i \in \mathbb{N}\}$, 由$\{T_i\}$ 自然诱导了其上的变换T。它为$\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ 的紧致子集，记为$\varprojlim\{(X_i,T_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$. 定义$\rho(x,y) = \sum_{i\in\mathbb{N}} 1/2^i \rho_i(x_i,y_i)$，它为逆极限系统上的一个度量。

定义2.1. [Host-Kra-Maass] [52] 系统(X,T) 称为*d 阶准幂零系统(d-step pro-nilsystem)* 或*阶数为d 的系统（system of order d）*, 是指它为d 阶幂零极小系统的逆极限。

∞ 阶幂零系统 指它为幂零系统的逆极限（不限定阶数[16]）.

定义2.2. $\mathbb{Z}$ 的子集A 称为*Nil_d $Bohr_0$ 集* 是指存在一个d 阶幂零系统(X,T), $x_0 \in X$ 以及x_0 的开邻域U 使得$N(x_0,U)$ 包含于A 中。用$\mathcal{F}_{d,0}$ 记全体Nil_d Bohr_0 集。

因为任何d 阶幂零系统为distal 的，那么它的逆极限系统d 阶准幂零系统也是distal的。对于distal 系统，它的每个点都是极小点。由此易见在上面定义中，(X,T) 可以改为d 阶极小幂零系统或d 阶准幂零系统。

2.4 超空间

设X 为紧致度量空间，设ρ 为其上的度量。用$K(X)$ 来记X 上的超空间（*Hyperspace*），亦即X 全体非空闭子集全体。超空间赋予*Hausdorff* 度量 d_H：

$$d_H(A,B)=\max\left\{\max_{x\in A}\min_{y\in B}\rho(x,y),\max_{y\in B}\min_{x\in A}\rho(x,y)\right\}\forall A,B\in K(X).$$

在此度量下$K(X)$ 成为一个紧致度量空间。易证，X 的全体有限子集在$K(X)$ 中稠密.

对于X 的非空开集$U_1,\dots,U_n$ 和$n\in\mathbb{N}$, 我们令

$$\langle U_1,\dots,U_n\rangle=\left\{K\in K(X):K\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_i \text{ 且} K\cap U_i\neq\emptyset,\ \forall i=1,\dots,n\right\}.$$

那么下面集合

$$\{\langle U_1,\dots,U_n\rangle:U_1,\dots,U_n \text{ 为} X \text{ 非空开集}, n\in\mathbb{N}\}$$

形成Hausdorff 度量d_H 相应拓扑的一组基。这个拓扑也称为*Vietoris* 拓扑 (参见[49, Theorem 4.5])。

现在设(X,T) 为拓扑动力系统，那么T 可以诱导一个超空间上的连续映射$T_K:K(X)\to K(X)$：

$$T_K(C)=TC,\quad \forall C\in K(X).$$

于是$(K(X),T_K)$ 成为一个拓扑动力系统，称之为(X,T) 的*诱导系统*或*超空间系统*.

3 多重回复性

3.1 多重Birkhoff 回复定理

动力系统中多重回复性研究始于运用动力系统方法来研究诸如van der Waerden定理的组合数论问题[84].

定理3.1 (van der Waerden定理). *对于自然数的任何有限剖分，必有一个剖分元包含任意长的等差数列。*

Furstenberg 和Weiss 在文[32] 中阐述了van der Waerden 定理如何等价于拓扑多重回复定理的，并且通过证明如下多重回复定理给出了van der Waerden 定理的新证明。

定理3.2 (单个映射的多重Birkhoff回复定理). *设(X,T) 为动力系统，$d\in\mathbb{N}$。那么存在点$x\in X$ 和递增自然数序列$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得*

$$T^{jn_k}x\to x, k\to\infty, \forall j=1,2,\dots,d.$$

这个定理容易推广到多个映射的情况：

定理3.3 (多重Birkhoff回复定理)**.** *设X 为紧致度量空间，$T_1, \dots, T_d$ 为X 上相互交换的连续映射（$d \in \mathbb{N}$）。那么存在点$x \in X$ 和递增自然数序列$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得*

$$T_j^{n_k} x \to x, k \to \infty, \forall j = 1, 2, \dots, d.$$

上述多重Birkhoff 回复定理等价于van der Waerden定理的$\mathbb{N}^d$ 推广版本Grünwald 定理[7, Theorem 1.20]。

van der Waerden 定理的一个重要推广是著名的Szemerédi 定理：

定理3.4 (Szemerédi)**.** *[79] 任何具有正上密度的自然数子集必定包含了任意长的等差数列。*

Furstenberg 运用动力系统方法给出了Szemerédi 定理的新证明[25]。首先他证明了Szemerédi 定理等价于如下的多重Poincaré 回复定理.

定理3.5 (单个映射多重Poincaré 回复定理)**.** *[25] 设$(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为保测系统，$d \in \mathbb{N}$。那么对于任何具有正测度的集合$A \in \mathcal{B}$，存在任意大的整数$n \geq 1$ 使得*

$$\mu(A \cap T^{-n}A \cap \cdots T^{-2n}A \cap \cdots \cap T^{-dn}A) > 0.$$

Furstenberg 和Katznelson 对这个结果进行了系列推广[27, 28, 30]，例如他们证明了：

定理3.6 (多重Poincaré 回复定理)**.** *[27] 设$(X, \mathcal{B}, \mu)$ 为概率空间，$T_1, \dots, T_d$ 为$(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上相互交换的保测映射($d \in \mathbb{N}$)。那么对于任何具有正测度的集合$A \in \mathcal{B}$，存在任意大的整数$n \geq 1$ 使得*

$$\mu(A \cap T_1^{-n}A \cap \cdots T_2^{-n}A \cap \cdots \cap T_d^{-n}A) > 0.$$

根据这些定理，我们可以定义多重的Poincaré 和Birkhoff 回复集[22]。

定义3.7. 设$d \in \mathbb{N}$。

1. 称$S \subset \mathbb{Z}$ 为d 重*Poincaré 回复集* 是指对于每个保测系统$(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ 和正测集$A \in \mathcal{X}$，存在$n \in S$ 使得$\mu(A \cap T^{-n}A \cap \ldots \cap T^{-dn}A) > 0$.

2. 称$S \subset \mathbb{Z}$ 为d 重*Birkhoff 回复集*是指对于任何极小系统(X, T)以及任何X 的非空开集U，存在$n \in S$ 使得$U \cap T^{-n}U \cap \ldots \cap T^{-dn}U \neq \emptyset$.

用$\mathcal{F}_{Poi_d}$ 和$\mathcal{F}_{Bir_d}$ 记由全体d 重Poincaré 回复集和全体d 重Birkhoff 回复集组成的族。

在[22] 中作者详细研究了这些定义，指出d 重Poincaré （Birkhoff）回复集与$d+1$ 重Poincaré (Birkhoff) 回复集是不一样的概念。

3.2 多重Birkhoff 回复定理的多项式推广

设$\mathcal{P}$ 为全体整数值多项式（在整数集上取值为整数的多项式），$\mathcal{P}_0$ 为满足$p(0)=0$ 的整数值多项式p 的全体，$\mathcal{P}_0^*$ 为$\mathcal{P}_0$ 非常值元素全体。

定理3.8 (Leibman). *[69]* 设X 为紧致度量空间，设Γ 为幂零群，设$T_1,\dots,T_d\in\Gamma$，$k\in\mathbb{N}$ 以及$p_{i,j}\in\mathcal{P}_0, i=1,2,\dots,k; j=1,2,\dots,d$. 那么存在点$x\in X$ 以及递增自然数序列$\{n_m\}_{m=1}^\infty$ 使得对于每个$i=1,\dots,k$,

$$T_1^{p_{i,1}(n_m)}\cdots T_d^{p_{i,d}(n_m)}x\to x,\ m\to\infty.$$

这个定理是多重Birkhoff 回复定理对于幂零群作用的多项式推广, 对于交换群的情况是由Bergelson 和Leibman 给出的[10]。如果我们要求(X,Γ) 为极小的，那么多重回复点是X 的稠密G_δ 集。即，

定理3.9 (Leibman). *[69]* 设X 为紧致度量空间，设Γ 为幂零群，(X,Γ) 为极小系统。设$T_1,\dots,T_d\in\Gamma$，$k\in\mathbb{N}$ 以及$p_{i,j}\in\mathcal{P}_0, i=1,2,\dots,k; j=1,2,\dots,d$. 那么存在稠密$G_\delta$ 集X_0 使得对于任何点$x\in X_0$ 存在递增自然数序列$\{n_m\}_{m=1}^\infty$ 使得对于每个$i=1,\dots,k$,

$$T_1^{p_{i,1}(n_m)}\cdots T_d^{p_{i,d}(n_m)}x\to x,\ m\to\infty.$$

这个结果的遍历理论版本请参见[91]。

3.3 多重遍历平均

多重遍历平均问题是比多重回复定理更为深刻的一个问题：给定一个概率空间X，设$T_1,\dots,T_k$ 为X 上的保测变换，对于X 上可测函数$f_1,\dots,f_k$，称

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f_1(T_1^nx)f_2(T_2^nx)\dots f_k(T_k^nx)$$

为多重遍历平均。多重遍历平均问题就是研究多重遍历平均是否收敛的问题（这里的收敛包括L^2 以及逐点收敛两种情况）。如果只有一个保测映射，那么此时多重遍历平均是指平均$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f_1(T^nx)f_2(T^{2n}x)\dots f_k(T^{kn}x)$。$k=1$ 就是著名的von Neumann 的L^2 遍历定理和Birkhoff 逐点遍历定理。

目前L^2 收敛的情况的结果比较丰富。对于单个映射Host 和Kra [50] 证明了：设$(X,\mathcal{X},\mu,T)$ 为保测系统，$d\in\mathbb{N}$, 以及$f_i\in L^\infty(X,\mathcal{X},\mu)$, $i=1,2,\dots,d$. 那么

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f_1(T^nx)\dots f_d(T^{dn}x)$$

在L^2 中收敛(也可参见Ziegler [90]). 对于$T_1,\dots,T_k$ 相互交换的情况由陶哲轩给出[80]. 最近Walsh [89] 将L^2 收敛的情况推到了非常一般的情况：设Γ 为幂零群，$(X,\mathcal{X},\mu,\Gamma)$ 为保测系统。那么对于$T_1,T_2,\dots,T_d\in\Gamma$, $f_1,\dots,f_k\in L^\infty(X,\mathcal{X},\mu)$ 以及整数值多项式$p_{i,j}$，

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\prod_{j=1}^{k}(T_1^{p_{1,j}(n)}T_2^{p_{2,j}(n)}\cdots T_d^{p_{d,j}(n)})f_j$$

在$L^2(X,\mathcal{X},\mu)$ 中收敛。

但是对于逐点收敛的情况，只有很少的进展。这方面最主要的结果是Bourgain 的结果，他证明了，对于任何整数值多项式$p(n)$ 以及$f\in L^p(X,\mathcal{X},\mu)$ $(p>1)$，平均$\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1}f(T^{p(n)}x)$ 几乎处处成立[13]；对$a_1,a_2\in\mathbb{Z}$ 和$f_1,f_2\in L^\infty(X,\mathcal{X},\mu)$，平均$\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1}f_1(T^{a_1n}x)f_2(T^{a_2n}x)$ 几乎处处成立[14]。最近黄文、邵松和叶向东[55]证明了：对于$d\in\mathbb{N}$和测度distal 系统，$\frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1}f_1(T^nx)\dots f_d(T^{dn}x)$ 几乎处处收敛，其中$f_1,\dots,f_d\in L^\infty(X,\mathcal{X},\mu)$。

3.4 多重遍历平均的拓扑对应

设$(X,\mathcal{X},\mu,T)$ 为遍历系统，$d\in\mathbb{N}$. 在文[55] 中，作者证明了存在X^d上概率测度族$\{\mu_x^{(d)}\}_{x\in X}$ 使得对于μ 几乎每个点$x\in X$，$\mu_x^{(d)}$ 为$T\times T^2\times\dots\times T^d$ 作用下遍历的，并且对于所有$f_1,\dots,f_d\in L^\infty(\mu)$,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f_1(T^nx)f_2(T^{2n}x)\dots f_d(T^{dn}x)\\&\longrightarrow\int_{X^d}f_1(x_1)f_2(x_2)\dots f_d(x_d)\ d\mu_x^{(d)}(x_1,x_2,\dots,x_d),\ N\to\infty\end{aligned}$$

其中收敛指在$L^2(\mu)$ 中收敛。

我们可以不妨设X 为紧致度量空间，T 为X 上连续自映射(例如参见[26])。我们称一个点$x_0\in X$ 为相对$T\times T^2\times\dots\times T^d$ 多重*generic* 的，是指对所有连续函数$f_1,\dots,f_d$,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f_1(T^nx_0)f_2(T^{2n}x_0)\dots f_d(T^{dn}x_0)\\&\longrightarrow\int_{X^d}f_1(x_1)f_2(x_2)\dots f_d(x_d)\ d\mu_{x_0}^{(d)}(x_1,x_2,\dots,x_d),\quad N\to\infty.\end{aligned}$$

设$\sigma_d=T\times T^2\times\dots\times T^d$，$\mathbf{x_0}=(x_0,x_0,\dots,x_0)\in X^d$。那么$x_0\in X$ 为相对于$T\times T^2\times\dots\times T^d$ 的多重*generic* 点当且仅当

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sigma_d^n\delta_{\mathbf{x_0}}\longrightarrow\mu_{x_0}^d,\quad N\to\infty,$$

其中$M(X^d)$ 为X^d 全体概率测度空间，赋予弱$\star$ 拓扑。

命题3.10. 设$(X,\mathcal{X},\mu,T)$ 为遍历系统，$d\in\mathbb{N}$, 其中X 为紧致度量空间，T 为X 上连续自映射。那么对于所有$f_1,\dots,f_d\in L^\infty(\mu)$,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f_1(T^nx)\dots f_d(T^{dn}x)$$

μ 几乎处处收敛当且仅当对μ 几乎所有点$x_0\in X$, x_0 为相对于$T\times T^2\times\dots\times T^d$ 的多重*generic* 点。

多重遍历平均的拓扑对应最早由Glasner 开始研究[33](其它证明见[74, 67]). 例如他证明了：

定理3.11 (Glasner)**.** *[33]* *设(X,T) 为拓扑弱混合的极小系统，$d\in\mathbb{N}$。那么存在稠密G_δ 子集X_0 使得对于任意$x\in X_0$,*

$$\overline{\{(T^nx,T^{2n}x,\ldots,T^{dn}x)\in X^d:n\in\mathbb{Z}\}}=X^d.$$

它的测度对应问题仍然未解决：

问题3.12. *设$(X,\mathcal{X},\mu,T)$ 为测度弱混合的保测系统，$d\in\mathbb{N}$。是否存在$X_0\in\mathcal{X}$ 使得$\mu(X_0)=1$，并且对于任何$x\in X_0$ 它是$T\times T^2\times\ldots\times T^d$ 下多重generic 点？即对任何$x\in X_0$,*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sigma_d^n\delta_{\mathbf{x}}\longrightarrow\mu^d,\ N\to\infty,$$

其中$\mu^d=\mu\times\ldots\times\mu$.

结合Bourgain 定理[13] 和Furstenberg-Sarközy 定理[25], 我们有

定理3.13. *设$(X,\mathcal{X},\mu,T)$ 为测度弱混合系统。那么对于任何整数值多项式$p(n)$ 和$f\in L^\infty(X,\mathcal{X},\mu)$，存在可测集$X_0\in\mathcal{X}$ 使得$\mu(X_0)=1$，并且对于任何$x\in X_0$,*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f(T^{p(n)}x)=\int_X fd\mu.$$

它的拓扑对应也是成立的：

定理3.14. *[58]* *设(X,T) 为拓扑弱混合的极小系统。那么对于任何整数值多项式$p(n)$, 存在稠密G_δ 集合$X_0\subseteq X$ 使得对于每个$x\in X_0$,*

$$\overline{\{T^{p(n)}x:n\in\mathbb{N}\}}=X.$$

3.5 弱混合系统的多重遍历平均问题

定理3.15 (Bergelson-Leibman)**.** *[10]* *设$(X,\mathcal{X},\mu,\Gamma)$ 为保测系统，Γ 为交换群使得对于任何$T\in\Gamma$, $T\neq e_\Gamma$, 为弱混合的。对$d,k\in\mathbb{N}$, 设$T_1,\ldots,T_d\in\Gamma$, $p_{i,j}\in\mathcal{P}_0,1\le i\le k,1\le j\le d$ 使得*

$$g_i(n)=T_1^{p_{i,1}(n)}\cdots T_d^{p_{i,d}(n)},\quad i=1,2,\ldots,k,$$

以及任何$i\neq j\in\{1,2,\ldots,k\}$ 表达式$g_i(n)g_j(n)^{-1}=T_1^{p_{i,1}(n)-p_{j,1}(n)}\cdots T_d^{p_{i,d}(n)-p_{j,d}(n)}$ 非平凡的依赖于n。那么对于任何$f_1,\ldots,f_k\in L^\infty(X,\mu)$,

$$\lim_{N\to\infty}\Big\|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\prod_{i=1}^k f_i(T_1^{p_{i,1}(n)}\cdots T_d^{p_{i,d}(n)}x)-\prod_{i=1}^k\int_X f_i(x)d\mu\Big\|_{L^2}=0.$$

事实上对于幂零作用，[91]给出了类似结果。最近黄文、邵松和叶向东给出了这个结果幂零群作用下的拓扑版本：

定理3.16. *[58] 设(X,Γ) 为动力系统，Γ 为幂零群，且对每个$T\in\Gamma$, $T\neq e_\Gamma$, 为弱混合极小的。对于$d,k\in\mathbb{N}$，设$T_1,\dots,T_d\in\Gamma$, $\{p_{i,j}(n)\}_{1\le i\le k,1\le j\le d}\in\mathcal{P}_0$ 使得任何$i=1,2,\dots,k$*

$$g_i(n)=T_1^{p_{i,1}(n)}\cdots T_d^{p_{i,d}(n)}$$

以及任何$i\neq j\in\{1,2,\dots,k\}$表达式$g_i(n)g_j(n)^{-1}$ 都非平凡依赖于n 那么存在X 稠密G_δ 子集X_0 使得对所有$x\in X_0$

$$\{(g_1(n)x,\dots,g_k(n)x):n\in\mathbb{Z}\}$$

在X^k 在稠密。

注记3.17. 称$g(n)$ 非平凡依赖于n 是指$g(n)$ 为$\mathbb{Z}$ 到Γ 的非平凡映射。当Γ 为交换群时，我们有

$$g_i(n)g_j(n)^{-1}=T_1^{p_{i,1}(n)-p_{j,1}(n)}\cdots T_d^{p_{i,d}(n)-p_{j,d}(n)}.$$

如果Γ 为幂零群，那么表达式$g_i(n)$ 和$g_i(n)g_j(n)^{-1}$ 会依赖于Γ 的Malcev 基。

作为上定理的应用，可以证明下结论：

定理3.18. *[58] 设(X,Γ) 为动力系统，其中Γ 为幂零群使得每个$T\in\Gamma$, $T\neq e_\Gamma$, 为拓扑弱混合且极小的。对$k\in\mathbb{N}$ 设$T_1,\dots,T_k\in\Gamma$, $\{p_i(n)\}_{1\le i\le k}\in\mathcal{P}_0$ 使得$g(n)=T_1^{p_1(n)}\cdots T_k^{p_k(n)}$ 非平凡依赖于n. 那么存在一个X 的稠密G_δ 子集X_0 使得对于任何$x\in X_0$ 和X 任何非空开集U, 集合$\{n\in\mathbb{Z}:g(n)x\in U\}$ 为piecewise syndetic 的。*

作为本节的结束，我们提出下面的问题。

问题3.19. *如何对于一般极小幂零群作用陈述和证明多重遍历平均的拓扑对应？*

4 Bohr 问题

4.1 拓扑回复集

定义4.1. 一个子集$R\subset\mathbb{N}$ 称为是*拓扑回复集* 或*Birkhoff 回复集*是指对于任何极小系统(X,T) 以及其非空开集$U\subset X$, 存在$n\in R$ 使得$U\cap T^{-n}U\neq\emptyset$.

一个子集$R\subset\mathbb{N}$ 称为是*Bohr 回复集* 是指对于任何紧致交换度量群上旋转系统(X,T) 以及其非空开集$U\subset X$, 存在$n\in R$ 使得$U\cap T^{-n}U\neq\emptyset$.

对于$l\geq 1$ 令

$$N^l(U)=\{n\in\mathbb{N}:U\cap T^{-n}U\cap\ldots\cap T^{-ln}U\neq\emptyset\}.$$

称$R\subset\mathbb{N}$ 为*l 重回复集*或*l 重 Birkhoff 回复集*是指对于任何极小系统(X,T) 以及其非空开集$U\subset X$, 存在$n\in R$ 使得$N^l(U)\neq\emptyset$.

定理4.2. *[53] 设$R \subset \mathbb{N}$。以下命题等价：*

1. *R 为l 重回复集。*
2. *对于任何系统(X,T) 以及其开覆盖$\mathcal{U} = \{U_1,\dots,U_r\}$，存在$1 \le j \le r$ 和$n \in R$ 使得$n \in N^l(U_j)$.*
3. *对于$\mathbb{N}$ 的任何剖分$\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$，存在某个剖分元包含公差属于$R$且长为$l+1$ 的等差数列。*
4. *每个syndetic 集$E \subset \mathbb{N}$ 包含公差属于R且长为$l+1$ 的等差数列。*
5. *对于任何系统(X,T)，任何$\epsilon > 0$, 存在$x \in X$ 和$n \in R$ 使得 $\sup_{1\le j\le l} d(T^{jn}x,x) < \epsilon$.*
6. *对于任何系统(X,T), 存在$x \in X$ 使得$\inf_{n\in R} \sup_{1\le j\le l} d(T^{jn}x,x) = 0$.*
7. *对于任何极小系统(X,T)，存在稠密G_δ 子集$X_0 \subset X$ 使得对于$x \in X_0$, $\inf_{n\in R} \sup_{1\le j\le l} d(T^{jn}x,x) = 0$.*

4.1.1 Bohr 问题

定义4.3. 集合$E \subset \mathbb{N}$ 称为$Bohr_0$ 集 是指它包含了形如下集合的整数集

$$\{n \in \mathbb{N} : ||\alpha_1 n|| < \epsilon, \dots, ||\alpha_k n|| < \epsilon\},$$

其中$k \in \mathbb{N}$，$\alpha_1,\dots,\alpha_k \in \mathbb{R}$ 以及$\epsilon > 0$。

注意Katznelson [63] 说明A 为Bohr_0 集当且仅当它为Nil_1 Bohr_0 集。对于Nil_d Bohr_0 集，我们可以运用广义多项式对它进行刻画（参见[56]）。

问题4.4 (Bohr 问题)**.** *设$S \subset \mathbb{N}$ 为syndetic 集。那么$S - S$ 是否一定包含了一个$Bohr_0$ 集？*

易见$S - S$ 为Δ^* 集(此根据$S - S \supset N(U,U)$ 易得，其中$U \subset X$ 为某极小系统(X,T) 的非空开集)。下面我们会看到，这个问题有动力系统、组合数论、调和分析等的等价版本。

问题4.5 (Katznelson)**.** *[63] 任何Bohr 回复集是否为拓扑回复集？*

上面两个问题实际上是等价的：

定理4.6. *以下命题等价：*

1. *设$S \subset \mathbb{N}$ 为syndetic的，那么$S - S$ 包含一个$Bohr_0$ 集。*
2. *Bohr 回复集是拓扑回复集。*
3. *对于任何系统(X,T) 以及它的非空开集U，$N_X(U,U)$ 包含了某个形如$N_Y(V,V)$ 的集合，其中(Y,S) 为极小等度连续系统，V 为Y 的非空开集。*

4. 如果集合$E \subset \mathbb{N}$ 满足$E \cap (S-S) \neq \emptyset$ （其中$S = N_T(x, U)$：(X, T) 为任何一个极小等度连续系统，$x \in X$ 以及U 为x 开邻域），那么E 为拓扑回复集。

5. $\mathcal{F}_{Bir_1} = \mathcal{F}^*_{1,0}$.

关于Bohr 问题的更多讨论请参见[12, 53].

4.2 Veech 定理

关于Bohr 问题最主要的进展是Veech 在1968 年的结果：

定理4.7 (Veech)**.** *[81] 设S 为syndetic 集合，那么$(S-S)\Delta B$ 包含了一个$Bohr_0$ 集，其中B 为零上Banach 密度集合。*

关于Bohr 问题的其它结果有：

定理4.8 (Følner)**.** *[23] 如果$S \subseteq \mathbb{Z}$ 为syndetic 集合，那么存在$Bohr_0$ 集B 使得$S-S+S-S \supseteq B$.*

定理4.9 (Ellis-Keynes)**.** *[20] 如果$S \subseteq \mathbb{Z}$ 为syndetic 集合，那么存在$Bohr_0$ 集合B 和$s \in S$ 使得$S-S+S-s \supseteq B$.*

在文献[53] 中也有关于Bohr 问题最近的一些结论。

4.3 Veech 定理的高阶情况

黄文、邵松和叶向东给出了Veech 定理的高阶版本：

定理4.10. *[56, Theorem A] 设$d \in \mathbb{N}$.*

1. *如果$A \subset \mathbb{Z}$ 为Nil_d $Bohr_0$ 集，那么存在syndetic 子集S 使得*

$$A \supset \{n \in \mathbb{Z} : S \cap (S-n) \cap (S-2n) \cap \ldots \cap (S-dn) \neq \emptyset\}.$$

2. *对于syndetic 子集S,*

$$\{n \in \mathbb{Z} : S \cap (S-n) \cap (S-2n) \cap \ldots \cap (S-dn) \neq \emptyset\}$$

为“几乎”Nil_d $Bohr_0$ 集，即存在零上Banach 密度集合$M \subset \mathbb{Z}$ 使得$I \Delta M$ 为Nil_d $Bohr_0$ 集。

在定理4.10 中“几乎”能否去掉，就是所谓的高阶Bohr 问题，等价的可以论述为：

问题4.11 (高阶Bohr 问题)**.** *[56] $\mathcal{F}_{Bir_d} = \mathcal{F}^*_{d,0}$?*

一个重要的事实是：对于$d \in \mathbb{N}$，有$\mathcal{F}_{Poi_d} \subset \mathcal{F}_{Bir_d} \subset \mathcal{F}^*_{d,0}$（[56, Corollary D]）。注意$\mathcal{F}_{Poi_1} \neq \mathcal{F}_{Bir_1}$ [66].

为证明定理4.10，我们运用Furstenberg 对应原则将之转换为动力系统回复性问题，即我们证明了如下等价命题：

定理4.12. 设$d \in \mathbb{N}$.

1. 如果$A \subset \mathbb{Z}$ 为Nil_d $Bohr_0$ 集，那么存在极小d 阶幂零系统(X,T) 以及它的非空开集U 使得
$$A \supset \{n \in \mathbb{Z} : U \cap T^{-n}U \cap \ldots \cap T^{-dn}U \neq \emptyset\}.$$
2. 对于任何极小系统(X,T) 以及它的非空开集U,
$$I = \{n \in \mathbb{Z} : U \cap T^{-n}U \cap \ldots \cap T^{-dn}U \neq \emptyset\}$$
为“几乎”Nil_d $Bohr_0$ 集。

定理4.10 (1) 的证明需要运用幂零Lie 群理论以及非常复杂的构造和计算。而定理4.10 (2) 的证明依赖于Bergelson-Host-Kra 一个定理[9, Theorem 1.9]：设$(X,\mathcal{X},\mu,T)$ 为遍历系统，$f \in L^\infty(\mu)$ 以及$d \in \mathbb{N}$. 那么序列$\{I_f(d,n)\}$ 为一个d 阶幂零序列与一个一致密度趋向于零的序列之和，其中$I_f(d,n) = \int f(x)f(T^n x)\ldots f(T^{dn}x)\, d\mu(x)$.

4.4 高阶几乎自守性与d 阶局部邻近关系

在进一步讨论之前，我们需要引入一些新的概念。设$d \in \mathbb{N}$，$P = \{p_i\}_i$ 为$\mathbb{Z}$ 中一个(有限或无限) 序列。集合$SG_d(P)$ 称为P 的间距小于d 和集（*set of sums with gaps of length less than d of P*） 是指它是形如下式的数全体
$$\epsilon_1 p_1 + \epsilon_2 p_2 + \ldots + \epsilon_n p_n,$$
其中$n \geq 1$ 为整数，$\epsilon_i \in \{0,1\}$ $\forall 1 \leq i \leq n$, ϵ_i 不全为0, 并且任何两个相邻的1 之间的0 的个数小于d。对$d \in \mathbb{N}$, 令$\mathcal{F}_{SG_d}$ 为全体SG_d 集组成的族。易见，
$$\mathcal{F}_{SG_1} \supset \mathcal{F}_{SG_2} \supset \ldots \supset \mathcal{F}_{SG_\infty} =: \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_{SG_i}.$$

注意在上面定义中, P 视为序列而非$\mathbb{Z}$ 子集。例如, 如果$P = \{p_i\}$, 那么$SG_1(P)$ 为形如$p_m + p_{m+1} + \ldots + p_n$ 的元素全体, 于是它与差集$\Delta(S)$ 一致（其中$S = \{0, p_1, p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3, \ldots\}$）。因此，$SG_1^*$ 集也就是Δ^* 集。对于序列P, $SG_2(P)$ 的元素形如
$$\sum_{i=m_0}^{m_1} p_i + \sum_{i=m_1+2}^{m_2} p_i + \ldots + \sum_{i=m_{k-1}+2}^{m_k} p_i + \sum_{i=m_k+2}^{m_{k+1}} p_i$$
其中$k \in \mathbb{N}$，自然数列$m_0, m_1, \ldots, m_{k+1}$ 满足$m_{i+1} \geq m_i + 2$，$\forall i = 1, \ldots, k$, 以及$m_1 \geq m_0$.

设(X,T) 为拓扑动力系统，$d \geq \mathbb{N}$。点对$(x,y) \in X \times X$ 称为是d 阶局部邻近的*(regionally proximal of order d)* 如果对于任何$\delta > 0$, 存在$x', y' \in X$ 以及向量$\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ 使得$\rho(x,x') < \delta, \rho(y,y') < \delta$, 且
$$\rho(T^{\mathbf{n}\cdot\epsilon}x', T^{\mathbf{n}\cdot\epsilon}y') < \delta, \ \forall \epsilon \in \{0,1\}^d, \epsilon \neq (0,\ldots,0),$$

其中$\mathbf{n}\cdot\epsilon=\sum_{i=1}^{d}\epsilon_i n_i$. 用$\mathbf{RP}^{[d]}(X)$ 表示全体d 阶局部邻近点对的集合，称之为d 阶局部邻近关系（*the regionally proximal relation of order d*）。

局部渐近关系最早由Host-Kra-Maass 在文[52] 中引入，他们同时证明了对于极小distal系统，$\mathbf{RP}^{[d]}(X)$ 为等价关系。在[78] 中，邵松和叶向东证明了对于一般的极小系统，d 阶局部邻近关系为等价关系。注意，当$d=1$ 时$\mathbf{RP}^{[1]}(X)$ 为经典的局部邻近关系，它是等价关系的第一个证明是由Veech 给出的[81]。关于进一步的结果，请参见[44, 45, 46, 43].

在[56] 中，作者运用各种族对d 阶局部邻近关系进行了刻画。

定理4.13. *[56, Theorem E] 设(X,T) 为极小系统，$x,y\in X$，$d\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$. 那么以下等价：*

1. $(x,y)\in\mathbf{RP}^{[d]}$.
2. 对于y 的任何邻域U，$N(x,U)\in\mathcal{F}^*_{d,0}$.
3. 对于y 的任何邻域U，$N(x,U)\in\mathcal{F}_{Poi_d}$.
4. 对于y 的任何邻域U，$N(x,U)\in\mathcal{F}_{Bir_d}$.
5. 对于y 的任何邻域U，$N(x,U)\in\mathcal{F}_{SG_d}$.

对于极小系统(X,T), 点$x\in X$ 称为d 阶几乎自守点 是指

$$\mathbf{RP}^{[d]}[x]=\{y\in X:(x,y)\in\mathbf{RP}^{[d]}\}=\{x\}.$$

我们可以运用$\mathcal{F}^*_{Poi_d}$, $\mathcal{F}^*_{Bir_d}$ 和$\mathcal{F}_{d,0}$ 来刻画d 阶几乎自守性。

定理4.14. *[56, Theorem F] 设(X,T) 为极小系统，$x\in X$，$d\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$。那么以下命题等价：*

1. x 为d 阶几乎自守点.
2. 对于x 的任何邻域V, $N(x,V)\in\mathcal{F}_{d,0}$.
3. 对于x 的任何邻域V, $N(x,V)\in\mathcal{F}^*_{Poi_d}$.
4. 对于x 的任何邻域V, $N(x,V)\in\mathcal{F}^*_{Bir_d}$.

特别地，当$d=\infty$时，我们有

定理4.15. *[56, Theorem8.1.7]设(X,T)为极小系统。那么(X,T)为∞-步几乎自守系统充分必要存在$x\in X$使得对于x的任意邻域V,$N(x,V)\in\mathcal{F}^*_{fip}$.*

这里$\mathcal{F}^*_{fip}$表示与包含任意长有限IP集都相交的集和组成的族。

4.5 Nil_d Bohr_0 集，SG_d 集以及Konieczny 的一个结果

在文献[51] 中，作者证明了每个SG_d 集为piecewise Nil_d Bohr_0 的，于是自然有下问题：

问题4.16. *每个Nil_d $Bohr_0$ 集是否为SG_d^* 集？*

在定理4.13 中我们知道对于刻画d 阶局部渐近关系，Nil_d Bohr_0 集和SG_d^* 集的作用是一样的。目前对于问题4.16，最佳的答案是Konieczny 的一个结果：

定理4.17. *[64] 如果$k \geq \frac{1}{2}d(d+1)$，那么$\mathcal{F}_{d,0} \subset \mathcal{F}_{SG_k}^*$。*

5 乘积回复性

设$\mathcal{F}$ 为族，(X,T) 为一个动力系统。点$x \in X$ 称为$\mathcal{F}$ *回复的* 是指对于x 的任何邻域U，$N(x,U) \in \mathcal{F}$. 点$x \in X$ 称为是$\mathcal{F}$ *乘积回复的*是指对于任何系统(Y,S) 中的$\mathcal{F}$ 回复点y，(x,y) 为乘积空间$(X \times Y, T \times S)$ 中的回复点。如果一个点为$\mathcal{F}_{inf}$ 乘积回复的，那么就直接称它为*乘积回复点*；如果它为$\mathcal{F}_s$ 乘积回复的，那么也称它为*弱乘积回复的*。

在本节中，我们讨论$\mathcal{F}$ 乘积回复性质，主要侧重于$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{inf}, \mathcal{F}_{ps}, \mathcal{F}_{pubd}$ 和$\mathcal{F}_s$ 的情况。

5.1 回复性与IP 集

IP 集是组合中非常重要的概念，著名的Hindman 定理断言IP 集具有Ramsey 性质：

定理5.1 (Hindman, [48]). *任何IP 集的有限剖分必有其一仍为IP 集。*

Furstenberg 运用IP 集来刻画回复点：x 为回复点当且仅当它为$\mathcal{F}_{ip}$ 回复的。并且对于任何IP-集R，存在动力系统(X,T)，其上一个回复点$x \in X$ 以及x 的邻域U 使得$N(x,U) \subseteq R \cup \{0\}$ [26, Theorem 2.17]。仿照Furstenberg 在[26] 中的方法，我们有如下结论：

引理5.2. *[17] 设(X,T) 为动力系统。如果$x \in R(X,T)$ 为回复点，$\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为x 为一组邻域集合，那么存在一个IP 集合$FS(\{p_i\}_{i=1}^{\infty})$ 使得对于任何$n \in \mathbb{N}$，*

$$FS(\{p_i\}_{i=n}^{\infty}) \subset N(x, V_n).$$

尤其，每个回复点为$\mathcal{F}_{ip}$ 回复的。

Furstenberg 运用IP* 刻画乘积回复，并且证明了一个点为乘积回复的当且仅当它为distal 点（见下面定理5.6的表述）。这个结论常见的证明需要运用Auslander-Ellis 定理：

定理5.3 (Auslander-Ellis). *[5, 18] 设(X,T) 为动力系统。那么对于任何点$x \in X$，其轨道闭包中存在极小点$y \in \overline{orb(x,T)}$ 使得(x,y) 为邻近的。*

注记5.4.
1. 定理5.3 常见的证明需要依赖于Zorn 引理。在文献[17] 中的证明仅运用了Hindman 定理，不依赖于Zorn 引理。类似的情况是，之前关于任何动力系统(X,T) 一定包含极小子系统的证明需要运用Zorn 引理，但是当空间X 为紧致度量空间而作用半群为$\mathbb{Z}_+$ 时，Weiss 在[88] 中给了一个构造性证明。

2. 根据Auslander-Ellis 定理，Furstenberg 引入了中心集（*central set*）的概念. 一个子集$S \subseteq \mathbb{Z}_+$ 称为中心集 是指存在系统(X,T), 一个点$x \in X$ 以及一个与x 邻近的极小点y 和y 的一个邻域U_y 使得$N(x,U_y) \subset S$。Furstenberg 证明了任何中心集是IP 集[26, Proposition 8.10.].

在Auslander-Ellis 定理中，我们还可以加上一定的乘积回复性质：

命题5.5. *[17] 设(X,T) 为拓扑动力系统。设(Y,S) 为另一动力系统以及取定其上的一个回复点$z \in R(Y,S)$。那么对于任何点$x \in X$，存在其轨道闭包中点$y \in \overline{orb(x,T)}$ 使得$(x,y) \in P(X,T)$ 并且(y,z) 为乘积系统$X \times Y$ 的回复点。*

5.2 乘积回复

下面我们给出Furstenberg 关于乘积回复点的刻画：

定理5.6. *[26, Theorem 9.11.] 设(X,T) 为动力系统。那么以下命题等价：*

1. *x 为乘积回复点；*
2. *x 为distal 点；*
3. *对于任何系统(Y,S) 中的极小点y, (x,y) 为乘积空间的极小点；*
4. *x 为IP^* 回复点。*

5.3 $\mathcal{F}_{ps}$ 乘积回复

文[47] 中指出一个$\mathcal{F}_s$ 乘积回复点不必为极小点。一个自然问题为: $\mathcal{F}_{ps}$ 乘积回复点是否必为极小点？董攀登、邵松和叶向东回答了这个问题：

定理5.7. *[17] 任何$\mathcal{F}_{ps}$ 乘积回复点必为极小点。*

由于$\mathcal{F}_{pubd}$ 乘积回复点为$\mathcal{F}_{ps}$ 乘积回复点，作为定理5.7 的推论, 每个$\mathcal{F}_{pubd}$ 乘积回复点必为极小点。一般的，我们有

推论5.8. *设$\mathcal{F}$ 为满足$\mathcal{F}_{ps} \subseteq \mathcal{F}$ 的族，那么每个$\mathcal{F}$ 乘积回复点必为极小点。*

另外一个相关的结论是：

定理5.9. *[17] 由$\mathcal{F}_s$ 乘积回复点的轨道闭包构造的系统是一个M 系统。*

易见$\mathcal{F}_{inf}$乘积回复$\Longrightarrow$$\mathcal{F}_{pubd}$乘积回复$\Longrightarrow$$\mathcal{F}_{ps}$乘积回复, 在[17] 中作者提出问题：上述蕴含关系可是严格的？Oprocha 和张国华在[76] 中研究了上述问题，指出上面几个性质等价。

根据定理5.6, 点x 为distal 的当且仅当x 为$\mathcal{F}_{inf}$乘积回复的。于是为了回答刚才的问题，仅需证明如下命题：

定理5.10. *[76] $\mathcal{F}_{ps}$ 乘积回复点为distal 点。*

5.4 弱乘积回复点

Furstenberg 证明了一个点为乘积回复的当且仅当它为distal 点（[26, Theorem 9.11, p. 181]，定理5.6). 在文[6] 中Auslander 和Furstenberg 提了如下问题：如果对于任何极小点y，(x, y) 为回复点，那么x 是否为distal 点？按照前面的定义，即问：弱乘积回复点是否为distal 点？在[47] 中作者给了否定的回答。

事实上在Furstenberg 和Auslander 提出这个问题的时候，Furstenberg 没有意识到在他之前的工作中就已回答了这个问题(参见[17, Theorem 4.3])。事实上，在文[26] 中Furstenberg 证明了F 系统不交于任何极小系统。任取一个F 系统X 以及它的一个传递点x，下面说明x 是弱乘积回复但是非distal 的。设y 为任何极小系统Y 的极小点, 根据Furstenberg 的结论，(x, y) 为$X \times Y$ 的传递点，尤其为$X \times Y$ 的回复点。于是x 为弱乘积回复点。另外易见x 不可能为distal 点。

于是自然有下问题：

问题5.11. *[47, Question 5.3] [17, Question 9.2] 极小的弱乘积回复点是否为distal 点？*

最近Galsner 和Weiss 给出了一个否定的回答[40]：存在极小非distal的弱乘积回复点！这个反例基于[31]，[65] 和[87] 中的doubly minimal 系统和关于POD 系统的知识。

定义5.12. 一个极小动力系统(X, T) 称为*POD(proximal orbit dense)*是指它为完全极小的[2]，并且对于X 中任何不同点u 和v，存在非零$n \in \mathbb{Z}$ 使得$\Gamma_n = \{(T^n x, x) : x \in X\}$ 包含于$\overline{\mathrm{orb}((u, v), T \times T)}$ 中。

极小系统(X, T) 称为*doubly minimal* [87] 或称为具有拓扑极小自交（*having topologically minimal self joinings in the sense of del Junco* [65])是指$X \times X$ 中点在$T \times T$ 下的轨道要么为图$\Gamma_m = \{(T^m x, x) : x \in X\}$, $m \in \mathbb{Z}$，要么为全空间$X \times X$.

易见，任何doubly minimal 系统为POD 的。最近黄文和叶向东证明了任何doubly minimal 系统必为子转移系统[62]. 下面是关于POD 系统的重要性质：

定理5.13. *[31] 设(Y, S) 为POD 系统，那么对于任何不是(Y, S) 扩充的极小系统(X, T) 不交于(Y, S)。*

下面的命题是从[40]的证明中提炼出的一个一般性结果。

命题5.14. *设(X, T) 和(Y, S) 为极小系统，$\pi : X \longrightarrow Y$ 为因子映射。设$(y_0, x_1) \in Y \times X$ 以及$y_1 = \pi(x_1)$。*

1. *如果存在$n \in \mathbb{Z}$ 使得$y_1 = S^n y_0$，那么$\overline{orb((y_0, x_1), S \times T)}$ 形如$\Gamma_{\pi,n} = \{(\pi(x), T^n x) : x \in X\}$.*
2. *如果$\overline{orb((y_0, y_1), S \times S)} = Y \times Y$, 那么$\overline{orb((y_0, x_1), S \times T)} = Y \times X$.*

[2]完全极小是指对于任何$n \in \mathbb{N}$,（(X, T^n)）也是极小系统。

推论5.15. *设(Y,S) 为doubly minimal 系统，(X,T) 为任何一个极小系统。那么乘积空间任何点$(y,x)\in Y\times X$ 的轨道闭包要么为$Y\times X$，要么为图$\Gamma_{\pi,n}=\{(\pi(z),T^nz):z\in X\}$，其中$\pi:X\longrightarrow Y$ 为因子映射，$n\in\mathbb{Z}$.*

证明. 设(Y,S) 为doubly minimal 系统。那么(Y,S) 为弱混合的且具有POD 性质。设(X,T) 为任何一个极小系统。根据定理5.13，要么(X,T) 和(Y,S) 为不交的，要么(Y,S) 为(X,T) 的因子。如为前者，则乘积系统$Y\times X$ 为极小的。如为后者，存在因子映射$\pi:X\longrightarrow Y$. 我们考虑点$(y_0,x_1)\in Y\times X$，且记$y_1=\pi(x_1)$。那么根据命题5.14 以及(Y,S) 为doubly minimal 系统，我们就可得到所需结论。 □

由于存在非平凡的doubly minimal 系统[65, 87]，作为上面结果的推论我们得到问题5.11 的否定回答。首先我们注意任何极小弱混合系统没有distal 点。这是Veech 的一个结论[82]，也可按照下面事实推出这个结论：设(X,T) 为极小弱混合系统, 那么对于每个点$x\in X$ 存在稠密G_δ 子集$X_0\subset X$ 使得对于每个$x_0\in X_0$，点对(x,x_0) 为邻近的（参见[26, Theorem 9.12] 或引理6.10([3, Theorem 3.8])。关于这个结论的进一步推广请参见[55]。

定理5.16. *[40] 存在极小弱混合系统，它的每个点是弱乘积回复的。*

证明. 设(Y,S) 为弱混合的doubly minimal 系统，设(X,T) 为任何极小系统。由定理5.13，要么X 不交于Y，要么Y 为X 的因子。如果为第一种情况，那么$Y\times X$ 为极小系统，其上每个点(y,x) 自然为回复的。如果为第二种情况，由推论5.15，要么

$$\overline{\mathrm{orb}((y,x),S\times T)}=Y\times X$$

要么

$$\overline{\mathrm{orb}((y,x),S\times T)}=\Gamma_{\pi,n}=\{(\pi(z),T^nz):z\in X\},$$

其中$\pi:X\longrightarrow Y$ 为因子映射，$n\in\mathbb{Z}$。对于前者(y,x) 为回复点，对于后者存在$z\in X$ 使得$(y,x)=(\pi(z),T^nz)$ 为回复点。证毕! □

问题5.17. *给出弱乘积回复性质的刻画。*

如果x 为弱乘积回复点，那么它必为回复点。由定理5.9, x 的轨道闭包为M 系统。我们猜测:

问题5.18. *如果x 为弱乘积回复的，那么其轨道闭包中的弱乘积回复点为稠密G_δ 集。*

6 Furstenberg 不交性问题

类比于数论中互素的概念，Furstenberg 在动力系统中引入了不交性（*disjointness*）的概念[26].

定义6.1. 设(X,T) 和(Y,S) 为两个拓扑动力系统。子集$J\subset X\times Y$ 称为X 和Y 的一个交（*joining*）是指J 为非空闭不变的子集，并且到分量的投射分别映满X 和Y。如果$X\times Y$ 是唯一的交，那么就称(X,T) 和(Y,S) 不交的（*disjoint*），记为$(X,T)\perp(Y,S)$ 或$X\perp Y$.

设$\mathcal{F}$ 为一些系统的集合，$\mathcal{F}^{\perp}$ 表示与所有$\mathcal{F}$ 中元素不交的系统的全体。用$\mathcal{M}$ 表示全体极小系统的集合。Furstenberg [26] 证明了如果两个系统为不交的，那么其中至少有一个系统为极小的。Furstenberg 提了如下自然的问题：

问题6.2. *[26, Question E] 刻画*$\mathcal{M}^{\perp}$.

下面我们给出一个系统在$\mathcal{M}^{\perp}$ 中的条件以及$\mathcal{M}^{\perp}$ 中元素的一些性质，这些结果来自[60, 71, 16, 75, 72] 等。

6.1 必要条件

首先我们需要一些引理。

引理6.3. 设(X,T) 为传递系统，$x \in Tran_T$。那么

1. (X,T) 为M 系统当且仅当对于x 的任何邻域U, $N(x,U)$ 为*piecewise syndetic* 的。

2. 设K 为(X,T) 的极小子集. 那么K 是(X,T) 唯一的一个极小子集当且仅当对于K 的任何邻域U, $N(x,U)$ 为*thickly syndetic* 的。

定义6.4. $\mathbb{Z}_+$ 的子集A 称为m 集 是指存在极小系统(Y,S), $y \in Y$ 以及Y 的非空开子集V 使得$A \supset N(y,V)$. 全体m 集组成的集合记为$\mathcal{F}_{mset}$.

可以证明

定理6.5. 设(X,T) 为传递系统，$x \in Trans_T$. 那么

1. $(X,T) \in \mathcal{M}^{\perp}$ 当且仅当对于x 的任何邻域U以及任何m 集A，$N(x,U) \cap A \neq \emptyset$。

2. $(X,T) \perp (Y,S)$ 当且仅当对于x 的任何邻域U, $N(x,U) \in \mathcal{F}^{*}_{mset}(Y)$。

通过复杂的构造，我们能够证明

定理6.6. 每个*thickly syndetic* 集合包含了一个m 集合。

两个系统称为弱不交（*weakly disjoint*）是指乘积系统为传递的。于是一个系统*scattering* 当且仅当它与所有极小系统是弱不交的[11].

引理6.7. *[4, Theorem 2.9(b)] Scattering* 系统弱不交于所有M 系统。

有了以上的准备，我们能够证明

定理6.8. 设(X,T) 为传递系统。如果$(X,T) \perp \mathcal{M}$, 那么(X,T) 为弱混合的M 系统。

6.2 充分条件

Furstenberg [26] 证明了一个系统为F 系统当且仅当它为弱混合且具有稠密的周期点集；他也证明了F 系统不交于任何极小系统。在文献[60] 中作者证明了每个具有稠密正则极小点的弱混合系统不交于任何极小系统[3]。下面是这个结果的加强(见[17, 75]).

定理6.9. *每个具有稠密distal 点的弱混合系统不交于任何极小系统。*

在[17] 中作者给了两个证明，其中一个证明需要下面关于邻近核的一个结论。对于一个动力系统(X,T) 和点$x\in X$, 它的邻近核 是指$P[x]=\{y\in X: y$ 邻近于 $x\}=\{y\in X:(x,y)\in P(X,T)\}$. 关于更多邻近核的研究请参见[3, 55].

引理6.10. *[3, Theorem 3.8] 设(X,T) 为弱混合系统。那么对于任何点$x\in X$, 它的邻近核$P[x]$ 为X 的稠密G_δ 子集。*

在研究超空间时[71], 作者加强了定理6.9. 首先他们证明了

定理6.11. *设(X,T) 为动力系统。如果$(K(X),T_K)$ 为弱混合的，并且不交于任何极小系统，那么(X,T) 是弱混合的且不交于任何极小系统。*

我们称动力系统(X,T) 具有稠密*distal* 集 是指对于X 的任何非空开集U, 存在$(K(X),T_K)$ 的distal 点C 使得$C\subset U$。

命题6.12. *设(X,T) 为动力系统。则以下命题等价：*

1. *(X,T) 为弱混合的且具有稠密distal 集;*
2. *$(K(X),T_K)$ 为弱混合的且distal 点全体在空间中稠密;*
3. *$(K(X),T_K)$ 为弱混合的且具有稠密distal 集。*

综合定理6.11, 命题6.12 和定理6.9，我们有如下定理6.9 的推广：

定理6.13. *每个具有稠密distal 集的弱混合系统不交于任何极小系统。*

注意存在系统具有稠密的distal集，但是它的distal点全体不稠密[72].

6.3 问题

已知如果系统(X,T) 为弱混合的M 系统，那么$(K(X),T_K)$ 亦然。于是我们有如下问题：

问题6.14. *是否有如下结果：一个传递系统(X,T) 不交于任何极小系统当且仅当$(K(X),T_K)$ 为传递的且distal 点全体稠密？*

注意在[17] 中作者证明了任何具有稠密极小点的弱混合系统不交于所有极小PI 系统。

[3]一个极小点x 称为是正则的（*regular*） 是指对于x 的每个邻域U，存在k 使得$N(x,U)\supset k\mathbb{Z}_+$

7 更多的问题

由于篇幅的限制，还有很多有意义的回复性问题无法展开。这里我们陈述几个未解决的问题。在[37] 中，作者引入了各种刚性。对于$n \in \mathbb{N}$，我们称系统(X,T) 为n 刚性*(n-rigid)* 是指乘积系统$(X^n,T^{(n)})$ 中每个点都是回复点。

问题7.1. *对$n \geq 2$，是否存在系统为n 刚性但是非$(n+1)$ 刚性的？*

在[72]中，作者证明了如果(X,T)为一致刚性的（存在$n_i \longrightarrow \infty$使得$d(T^{n_i}, id) \longrightarrow 0$）那么$(K(X),T_K)$ 是逐点回复的。

问题7.2. *是否存在(X,T)使得$(K(X),T_K)$是逐点回复的，但(X,T)不为一致刚性的？*

在[87]中Weiss证明了正的2-刚性蕴含拓扑熵为零。一个未解决的问题是

问题7.3. *是否2-刚性蕴含拓扑熵为零？*

问题7.4. *设$\mathbb{P}$ 为素数集合。那么集合*

$$C_d(\mathbb{P}) = \{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P} \cap (\mathbb{P}-n) \cap (\mathbb{P}-2n) \cap \cdots \cap (\mathbb{P}-dn) \neq \emptyset\}$$

是否为Nil_d $Bohr_0$ 集合？

注意根据Green和Tao 的结论[42], 对于任何$d \in \mathbb{N}$, $C_d(\mathbb{P}) \neq \emptyset$.

致谢： 国家自然科学基金委员会资助11371339, 11431012, 11571335。

参考文献

[1] E. Akin, *The general topology of dynamical systems*, Graduate Studies in Mathematics, 1. American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.

[2] E. Akin, *Recurrence in topological dynamical systems: Furstenberg families and Ellis actions*, Plenum Press, New York, 1997.

[3] E. Akin and S. Kolyada, *Li-Yorke sensitivity, Nonlinearity*, **16** (2003), no. 4, 1421–1433.

[4] E. Akin and E. Glasner, *Residual properties and almost equicontinuity*, J. d'Anal. Math., **84** (2001), 243–286.

[5] J. Auslander, *Minimal flows and their extensions*, North-Holland Mathematics Studies, 153. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 122. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988.

[6] J. Auslander and H. Furstenberg, *Product recurrence and distal points*, Trans. Amer. Math. Soc. **343**(1994), no. 1, 221–232.

[7] V. Bergelson, *Combinatorial and Diophantine applications of ergodic theory*, Appendix A by A. Leibman and Appendix B by Anthony Quas and Máté Wierdl. Handbook of dynamical systems. Vol. 1B, 745–869, Elsevier B. V., Amsterdam, 2006.

[8] V. Bergelson, *Ultrafilters, IP sets, dynamics, and combinatorial number theory*, Ultrafilters across mathematics, 23–47, Contemp. Math., 530, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.

[9] V. Bergelson, B. Host and B. Kra, *Multiple recurrence and nilsequences. With an appendix by Imre Ruzsa*, Invent. Math., **160** (2005), no. 2, 261–303.

[10] V. Bergelson and S. Leibman, *Polynomial extensions of van der Waerden's and Szemerédi's theorems*, Journal of Amer. Math. Soc., **9** (1996), 725–753.

[11] F. Blanchard, B. Host and A. Maass, *Topological complexity*, Ergod. Th. and Dynam. Sys., **20** (2000), 641–662.

[12] M. Boshernitzan and E. Glasner, *On two recurrence problems*, Fund. Math., **206** (2009), 113–130.

[13] J. Bourgain, *Pointwise ergodic theorems for arithmetic sets.* With an appendix by the author, Harry Furstenberg, Yitzhak Katznelson and Donald S. Ornstein. Inst. Hautes études Sci. Publ. Math., **69** (1989), 5–45.

[14] J. Bourgain, *Double recurrence and almost sure convergence.* J. Reine Angew. Math., **404** (1990), 140–161.

[15] L. J. Corwin and F. P. Greenleaf, *Representations of nilpotent Lie groups and their applications.* Part I. Basic theory and examples, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 18, Cambridge University Press, Cambridge, 1990. viii+269 pp.

[16] P. Dong, S. Donoso, A. Maass, S. Shao and X. Ye, *Infinite-step nilsystems, independence and complexity*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **33** (2013), 118–143.

[17] P. Dong, S. Shao and X. Ye, *Product recurrent properties, disjointness and weak disjointness*, Israel J. Math., **188**(2012), 463-507.

[18] R. Ellis, *Lectures on topological dynamics*, W. A. Benjamin, Inc., New York 1969.

[19] D. Ellis, R. Ellis and M. Nerurkar, *The topological dynamics of semigroup actions*, Trans. Amer. Math. Soc., **353** (2001), no. 4, 1279–1320.

[20] R. Ellis and H. Keynes, *Bohr compactifications and a result of Folner*, Israel J. Math., **12** (1972), 314-330.

[21] P. Erdös and P. Turán, *On some sequences of integers*, J. London Math. Soc., **11** (1936), 261-264.

[22] N. Frantzikinakis, E. Lesigne and M. Wierdl, *Sets of k-recurrence but not $(k+1)$-recurrence*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **56** (2006), no. 4, 839–849.

[23] E. Følner, *Generalization of a theorem of Bogoliuboff to topological abelian groups*, Math. Scand., **2**(1954), 5-19.

[24] H. Furstenberg, *Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation*, Math. Systems Theory, **1**(1967), 1-49.

[25] H. Furstenberg, *Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions.* J. Analyse Math., **31** (1977), 204–256.

[26] H. Furstenberg, *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*, M. B. Porter Lectures. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1981.

[27] H. Furstenberg and Y. Katznelson, *An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations*, J. Analyse Math., **34** (1978), 275–291.

[28] H. Furstenberg and Y. Katznelson, *An ergodic Szemerédi theorem for IP-systems and combinatorial theory*, J. Analyse Math., **45** (1985), 117–168.

[29] H. Furstenberg and Y. Katznelson, *Idempotents in compact semigroups and Ramsey theory*, Israel J. Math., **68** (1989), no. 3, 257–270.

[30] H. Furstenberg and Y. Katznelson, *A density version of the Hales-Jewett theorem*, J. Anal. Math., **57** (1991), 64–119.

[31] H. Furstenberg, H. Keynes and L. Shapiro, *Prime flows in topological dynamics*, Israel J. Math., **14** (1973), 26-38.

[32] H. Furstenberg and B. Weiss, *Topological dynamics and combinatorial number theory*, J. Anal. Math., **34** (1978), 61-85.

[33] E. Glasner, *Topological ergodic decompositions and applications to products of powers of a minimal transformation*, J. Anal. Math., **64** (1994), 241-262.

[34] E. Glasner, *On minimal actions of Polsih groups*, Topology Appl., **117**(1998), 259-272.

[35] E. Glasner, *Ergodic theory via joinings*, Mathematical Surveys and Monographs, 101. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[36] E. Glasner, *Classifying dynamical systems by their recurrence properties.* Topol. Methods Nonlinear Anal., **24** (2004), no. 1, 21-40.

[37] S. Glasner and D. Maon, *Rigidity in topological dynamics*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **9** (1989), no. 2, 309-320.

[38] E. Glasner and B. Weiss, *Sensitive dependence on initial conditions*, Nonlinearity, **6** (1993), 1067-1075.

[39] E. Glasner and B. Weiss, *On the interplay between measurable and topological dynamics*, Handbook of dynamical systems. Vol. 1B, 597–648, Elsevier B. V., Amsterdam, 2006.

[40] E. Glasner and B. Weiss, *On doubly minimal systems and a question regarding product recurrence*, arXiv:1508.02817.

[41] W. Gottschalk and G. Hedlund, *Topological Dynamics*, Amer. Math. Soc. Colloq., Vol. 36, 1955.

[42] B. Green and T. Tao, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*, Annals of Math., **167**(2008), 481–547.

[43] Y. Gutman, *Structure theorems for Host-Kra factors of finitely generated abelian actions*, preprint, 2015.

[44] Y. Gutman, F. Manners, and P. P. Varjú, *Cubespaces and higher order Fourier analysis*, preprint, 2015.

[45] Y. Gutman, F. Manners, and P. P. Varjú, *Nilspaces and nilmanifolds*, preprint, 2015.

[46] Y. Gutman, F. Manners, and P. P. Varjú, *Nilspaces and inverse limit representation theorems for topological dynamical systems.* preprint, 2015.

[47] K. Haddad and W. Ott, *Recurrence in pairs*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **28** (2008), no. 4, 1135–1143.

[48] N. Hindman, *Finite sums from sequences within cells of a partition of* $\mathbb{N}$, J. Combinatorial Theory Ser. A, **17** (1974), 1-11.

[49] Sam B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An introduction*, Pure and Applied Mathematics, **158**, Marcel Dekker Inc., New York, 1992.

[50] B. Host and B. Kra, *Nonconventional ergodic averages and nilmanifolds*, Ann. of Math. (2) **161**(2005), no. 1, 397-488.

[51] B. Host and B. Kra. *Nil-Bohr sets of integers.* Ergodic Theory Dynam. Sys- tems, **31** (2011), 113–142.

[52] B. Host, B. Kra and A. Maass, *Nilsequences and a structure theory for topological dynamical systems*, Adv. Math., **224** (2010) 103-129.

[53] B. Host, B. Kra and A. Maass, *Variations on topological recurrence*, Monatsh. Math., **179** (2016), no. 1, 57–89.

[54] W. Huang, K. Park and X. Ye, *Dynamical systems disjoint from all minimal systems with zero entropy*, Bull. Soc. Math. France, **135** (2007), 259-282.

[55] W. Huang , S. Shao and X. Ye, *Mixing and proximal cells along sequences*, Nonlinearity, **17**(2004), 1245-1260.

[56] W. Huang, S. Shao and X. Ye, *Nil Bohr-sets and almost automorphy of higher order*, Memoirs of Amer. Math. Soc., volume 241, Number 1143, 2016.

[57] W. Huang, S. Shao and X. Ye, *Pointwise convergence of multiple ergodic averages and strictly ergodic models*, arXiv:1406.5930v2[math.DS].

[58] W. Huang, S. Shao and X. Ye, *Topological correspondence of multiple ergodic averages of nilpotent group actions*, preprint, 2016.

[59] W. Huang and X. Ye, *An explicit scattering, non-weakly mixing example and weak disjointness*, Nonlinearity, **15**(2002), 1-14.

[60] W. Huang and X. Ye, *Dynamical systems disjoint from any minimal system*, Trans. Amer. Math. Soc., **357** (2) (2005), 669-694.

[61] W. Huang and X. Ye, *Generic eigenvalues, generic homomorphisms and weak disjointness*, Contemporary Mathematics, 567, 119-143, 2012.

[62] W. Huang and X. Ye, *A note on double minimality*, Comm. in Math. and Stat., **3**(2015), 57-61.

[63] Y. Katznelson, *Chromatic numbers of Cayley graphs on $\mathbb{Z}$ and recurrence.* Combinatorica, **21** (2001), no. 2, 211-219.

[64] J. Konieczny, *Combinatorial properties of Nil-Bohr sets*, arXiv:1507.07370.

[65] J. L. King, *A map with topological minimal self-joinings in the sense of del Junco*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **10**(1990), no. 4, 745-761.

[66] I. Křı́ž,*Large independent sets in shift-invariant graphs. Solution of Bergelson's problem*, Graphs Combin., **3** (1987), 145-158.

[67] D. Kwietniak and P. Oprocha, *On weak mixing, minimality and weak disjointness of all iterates*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **32** (2012), no. 5, 1661-1672.

[68] A. Leibman, *Pointwise convergence of ergodic averages for polynomial sequences of translations on a nilmanifold*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **25** (2005), 201-213.

[69] A. Leibman, *Multiple recurrence theorem for nilpotent group actions*, Geometic and Functional Analysis, **4**(1994), 648-659.

Multi-recurrence and van der Waerden systems, arXiv:1501.01491[math.DS].

[70] Jian Li and X. Ye, *Recent development of chaos theory in topological dynamics*, Acta. Math. Sinica, English Series, **32**(2016), no. 1, 83-114.

[71] Jie Li, K. Yan, and X. Ye, *Recurrence properties and disjointness on the induced spaces*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **35** (2015), 1059-1073.

[72] Jie Li, P. Oprocha, X. Ye and R. Zhang, *When are all closed subsets recurrent?*, arXiv:1504.08191, Ergodic Theory Dynam. Systems, to appear.

[73] A.I. Malcev, *On a class of homogeneous spaces*, Amer. Math. Soc. Translation, no. 39. (1951).

[74] T.K.S. Moothathu, *Diagonal points having dense orbit*, Colloq. Math., **120** (2010), 127-138.

[75] P. Oprocha, *Weak mixing and product recurrence*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **60** (4) (2010), 1233-1257.

[76] P. Oprocha and G. Zhang, *On weak product recurrence and synchronization of return times*, Adv. in Math., **244** (2013), 395-412.

[77] P. Oprocha and G. Zhang, *Topological aspects of dynamics of pairs, tuples and sets*, Recent progress in general topology. III, Atlantis Press, Paris, 2014, pp. 665–709.

[78] S. Shao and X. Ye, *Regionally proximal relation of order d is an equivalence one for minimal systems and a combinatorial consequence*, Adv. Math., **231** (2012), 1786-1817.

[79] E. Szemerédi, *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*, Acta Arith., **27**(1975), 199–245.

[80] T. Tao, *Norm convergence of multiple ergodic averages for commuting transformations*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **28** (2008), no. 2, 657-688.

[81] W. A. Veech, *The equicontinuous structure relation for minimal Abelian transformation groups*, Amer. J. Math., **90** (1968), 723–732.

[82] W. A. Veech, *Point-distal systems*, Amer. J. Math., **92** (1970), 205-242.

[83] W. A. Veech, *Topological dynamics*, Bull. Amer. Math. Soc., **83** (1977), 775-830.

[84] L. van der Waerden, *Beweis eine Baudetschen Vermutung Nieus Arch.* Wisk., **15** (1927), 212–216.

[85] J. de Vries, *Elements of Topological Dynamics*, Kluwer Academic Publishers (1993), Dordrecht.

[86] P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Graduate Texts in Mathematics, 79. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[87] B. Weiss, *Multiple recurrence and doubly minimal systems*, Topological dynamics and applications (Minneapolis, MN, 1995), 189-196, Contemp. Math., **215**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[88] B. Weiss, *Single Orbit Dynamics*, AMS Regional Conference Series in Mathematics **95**, 2000.

[89] M. Walsh, *Norm convergence of nilpotent ergodic averages*, Ann. of Math., **175** (2012) 1667-1688.

[90] T. Ziegler, *Universal characteristic factors and Furstenberg averages.* J. Amer. Math. Soc., **20** (2007), no. 1, 53-97.

[91] P. Zorin-Kranich, *A nilpotent IP polynomial multiple recurrence theorem.* J. Anal. Math. **123**(2014), 183-225.