第32卷第4期　　中 国 科 学 技 术 大 学 学 报　　Vol. 32, No. 4
2002年8月　　JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA　　Aug. 2002

文章编号:0253-2778(2002)04-0399-04

7类新的2紧优双环网无限族*

徐俊明,尹治军

(中国科学技术大学数学系,合肥,230026)

摘要:本文获得7类新的2紧优双环网无限族.

关键词:互连网;双环网;最优;紧优

中图分类号:O157.9; TP302.1　　**文献标识码**:A

AMS Classification (1991):05C12;68M10

0 引言

双环网因其独特的对称性、简单性和可扩展性等优良性质被广泛应用于计算机互连网络拓扑结构的设计中,是计算机互连网络或通讯系统的一类重要拓扑结构.双环网的图论模型是指这样一个有向图 $G(n;1,s)$:它的顶点集为$\{0,1,\cdots,n-1\}$,并从每个顶点 i 发出两条有向边 $i\to i+1(\mathrm{mod}\ n)$ 和 $i\to i+s(\mathrm{mod}\ n)$,$2\le s\le n-1$.从定义立即可知,对于给定的 n 和 s,唯一决定了 $G(n;s)$,因而也决定了它的直径.记 $G(n;s)$ 的直径为 $d(n;s)$,并记 $d(n)=\min\{d(n;s):1<s<n\}$.文献[1]中证明了:$d(n)\ge lb(n)=\lceil\sqrt{3n}\rceil-2$.

一个被广泛关注的问题是:对于给定的 n,确定 $d(n)$ 的值,并找出 s 使得 $d(n;s)=d(n)$.研究表明:要想得到 $d(n)$ 对参数 n 的显示表达式看来是不大可能的.于是,寻找双环网 $G(n;s)$ 无限族使其直径达到 $d(n)$ 已引起许多作者的研究兴趣[1~8].

设 Z 是非负整数集合.对于 $k\in Z$,若 $d(n;s)=d(n)=lb(n)+k$,则称 $G(n;s)$ 为 k 紧优的.0紧优和1紧优通常称为紧优和几乎紧优[5].若对任何 $t\in Z,t\ge t_0$,$G(n(t);s(t))$ 都是 k 紧优的,则称$\{G(n(t);s(t)):t\in Z,t\ge t_0\}$为 k 紧优双环网无限族.设 $t_0\in Z$,若对任何 $t\ge t_0$ 和 $s(t)$ 都有 $d(n(t);s(t))>lb(n(t))+k$,则称$\{n(t):t\in Z,t\ge t_0\}$为不含 k 紧优双环网的无限族.本文提到的 $n(t)$ 和 $s(t)$ 都是关于 $t\in Z$ 的整系数多项式.

李乔等人[5]提出了一个系统的构造方法,并通过该方法具体找出了一系列紧优和几乎紧优双环网络的无限族.同时提出研究的问题:对于给定的 $k>1$,找出 k 紧优双环网络无限族.

文献[6]证明了:当 $n(t)=3t^2+6t-26$ 时,若 $t=16f+31$,或者 $t=64f+87$,$f\in Z$,

---

* **收稿日期**:2002-01-22

基金项目:国家自然科学基金(19971086),中国科学院特支费和安徽省自然科学基金资助项目(01046102)

作者简介:徐俊明,男,1949年生,教授,博士生导师.Email: xujm@ustc.edu.cn

则$\{n(t(f)):f\in Z\}$既不含紧优又不含几乎紧优双环网. 文献[7]针对t的两种取法分别构造出2类2紧优双环网无限族,其相应的$n(t_0)$分别为92 899和139 939. 本文将利用t的这两种取法构造出另外7类2紧优双环网无限族,其中有4类相应的$n(t_0)$为19 171,另3类相应的$n(t_0)$分别为92 899和139 939.

1 若干引理

对任何正整数n,存在$t\in Z$使得$n=n(t)\in I=[3t^2+1,3t^2+6t+3]$. 令

$$I=I_1\cup I_2\cup I_3,\ 其中\begin{cases}I_1(t)=[3t^2+1,3t^2+2t],\\ I_2(t)=[3t^2+2t+1,3t^2+4t+1],\\ I_3(t)=[3t^2+4t+2,3t^2+6t+3].\end{cases}$$

显然,

$$n=n(t)\in I_i(t)\Leftrightarrow lb(n)=3t-2+i,\quad i=1,2,3. \tag{1}$$

引理1[5] 设$n(t)=3t^2+At+B\in I_i(t)$, $l=2t+a$, $h=2t+b$, $y=t+a+b-j$, $z=|y-x|$,其中a,b,x,y都是t的整系数多项式. 如果

$$(a+b-j)(a+b-j+z)-ab+(A+z-2j)t+B=0 \tag{2}$$

对任何$j=i+2$和$1\le i\le 3$成立,而且存在α和β使得

$$\alpha y+\beta(h-y)=1, \tag{3}$$

那么存在唯一的2紧优双环网$G(n(t);s(t))$,其中:

$$s\equiv\alpha l-\beta(l-x)\ (\mathrm{mod}\ n). \tag{4}$$

引理2[6] 设$n(t)=3t^2+6t-26$. 若$t=t(f)=16f+31$,或$t=t(f)=64f+87$,则$\{n(t(f)):f\in Z\}$既不含紧优又不含几乎紧优双环网.

2 主要结果

考虑$n(t)=3t^2+6t-26$. 因为当$t\ge 14$时,$n(t)=3t^2+6t-26\in I_3$,所以由式(1)知$lb(n(t))=3t+1$. 若存在$n(t)$个顶点的2紧优双环网,则由引理1知$j=5$. 在式(2)中令$A=6$, $B=-26$, $j=5$便得

$$(a+b-5)(a+b-5+z)-ab+(z-4)t-26=0. \tag{5}$$

由引理2知,当$t=t(f)=16f+31$,或$t=t(f)=64e+87$时,则$\{n(t(f)):f\in Z\}$既不含紧优又不含几乎紧优双环网.

取$b=8$, $z=2$且$t=t(f)=16f+31$代入方程(5)便得

$$a^2-32f-73=0. \tag{6}$$

下面,我们通过适当选取f, α和β使得它们满足引理1来确定2紧优双环网无限族.

定理1 设$n(e)=49\,152e^4-233\,472e^3+412\,416e^2-321\,024e+92\,899$且$s(e)=1\,536e^3-2\,304e^2-988e+1\,673$,则$\{G(n(e);s(e)):e\in Z\}$是直径为$384e^2-912e+528$的2紧优双环网无限族.

证明 取$f=f(e)=8e^2-19e+9$并代入方程(6),便得到一个解$a=a(e)=16e-19$. 于是,对任何$e\in Z$得

$$t(e) = t(f(e)) = 128e^2 - 304e + 175;$$
$$n(e) = 49\,152e^4 - 233\,472e^3 + 412\,416e^2 - 321\,024e + 92\,899;$$
$$l(e) = 2t + a = 256e^2 - 592e + 331;$$
$$h(e) = 2t + b = 256e^2 - 608e + 358;$$
$$y(e) = t + a + b - j = 128e^2 - 288e + 159;$$
$$x(e) = y + 2 = 128e^2 - 288e + 161.$$

取

$$\alpha = \alpha(e) = 4e + 3, \beta = \beta(e) = -4e - 4, \quad \forall e \in Z.$$

则容易验证,对任何 $e \in Z$,均有 $\alpha y + \beta(h - y) = 1$. 由式(4)有

$$s = s(e) = \alpha l + \beta(l - x)(\mathrm{mod}(n(e))) =$$
$$(4e + 3)(256e^2 - 592e + 331) + (4e + 4)(128e^2 - 304e + 170) =$$
$$1\,536e^3 - 2\,304e^2 - 988e + 1\,673.$$

直径 $d = lb(n) + 2 = 3t + 3 = 384e^2 - 912e + 528$. 故由引理 1 知 $\{G(n(e);s(e)) : e \in Z\}$ 是直径为 $384e^2 - 912e + 528$ 的 2 紧优双环网无限族.

从定理 1 的证明可知,从方程(6)获得一个 2 紧优双环网无限族的关键是适当选取 $f = f(e)$ 使得关于 a 的方程(6) 有正整数解 $a(e)$;然后选取 $\alpha = \alpha(e)$ 和 $\beta = \beta(e)$ 使得 $\alpha y + \beta(h - y) = 1$ 对任何 $e \in Z$ 成立.

在以下的讨论中,我们只选取这些关键的函数值,略去具体的验证和计算过程. 例如,在方程(6) 中取 $f = f(e) = 8e^2 - 13e + 3$,得 $a = a(e) = 16e - 13$. 再取 $\alpha = \alpha(e) = 4e - 4$ 和 $\beta = \beta(e) = -4e + 3$ 便得到

定理 2　设 $n(e) = 49\,152e^4 - 159\,744e^3 + 191\,232e^2 - 99\,840e + 19\,171$ 且 $s(e) = 1\,536e^3 - 3\,840e^2 + 3\,108e - 808$,则 $\{G(n(e);s(e)) : e \in Z\}$ 是直径为 $384e^2 - 1\,008e + 240$ 的 2 紧优双环网无限族.

在方程(6) 中取 $f = f(e) = 8e^2 + 13e + 3$,得 $a = a(e) = 16e + 13$. 再取 $\alpha = \alpha(e) = 4e + 3$ 和 $\beta = \beta(e) = -4e - 4$ 便得到

定理 3　设 $n(e) = 49\,152e^4 + 159\,744e^3 + 191\,232e^2 + 99\,840e + 19\,171$ 且 $s(e) = 1\,536e^3 + 3\,840e^2 + 3\,108e + 809$,则 $\{G(n(e);s(e)) : e \in Z\}$ 是直径为 $384e^2 + 624e + 240$ 的 2 紧优双环网无限族.

在方程(6) 中取 $f = f(e) = 8e^2 + 3e - 2$,得 $a = a(e) = 16e + 3$. 再取 $\alpha = \alpha(e) = 4e$ 和 $\beta = \beta(e) = -4e - 1$ 便得到

定理 4　设 $n(e) = 49\,152e^4 + 36\,864e^3 + 6\,912e^2 - 29$ 且 $s(e) = 1\,536e^3 + 768e^2 + 36e - 4(\mathrm{mod}\ n)$,则 $\{G(n(e);s(e)) : e \in Z, e \geq 1\}$ 是直径为 $384e^2 + 144e$ 的 2 紧优双环网无限族.

在方程(6) 中取 $f = f(e) = 8e^2 - 3e - 2$,得 $a = a(e) = 16e - 3$. 再取 $\alpha = \alpha(e) = 4e - 1$ 和 $\beta = \beta(e) = -4e$ 便得到

定理 5　设 $n(e) = 49\,152e^4 - 36\,864e^3 + 6\,912e^2 - 29$ 且 $s(e) = 1\,536e^3 - 768e^2 + 36e + 5$,则 $\{G(n(e);s(e)) : e \in Z, e \geq 1\}$ 是直径为 $384e^2 - 144e$ 的 2 紧优双环网无限族.

下面讨论 $t = t(f) = 64f + 87$ 的情形. 将 $b = 8, z = 2$ 且 $t = t(f) = 64f + 87$ 代入方

程(5)便得

$$a^2 - 128f - 185 = 0. \tag{7}$$

对任何 $e \in Z$,取 $f = f(e) = 32e^2 + 21e + 2$ 代入方程(7)得 $a = a(e) = 64e + 21$. 取 $\alpha = \alpha(e) = 16e + 5$, $\beta = \beta(e) = -16e - 6$ 便得到

定理6 设 $n(e) = 12\,582\,912e^4 + 16\,515\,072e^3 + 8\,073\,216e^2 + 1\,741\,824e + 139\,939$ 且 $s(e) = 98\,304e^3 + 98\,304e^2 + 32\,400e + 3\,515$,则$\{G(n(e);s(e)):e \in Z\}$是直径为 $6\,144e^2 + 4\,032e + 648$ 的2紧优双环网无限族.

在方程(7)中取 $f = f(e) = 32e^2 - 21e + 2$ 得 $a = a(e) = 64e - 21$. 再取 $\alpha = \alpha(e) = 16e - 6$ 和 $\beta = \beta(e) = -16e + 5$ 便得到

定理7 设 $n(e) = 12\,582\,912e^4 - 16\,515\,072e^3 + 8\,073\,216e^2 - 1\,741\,824e + 139\,939$ 且 $s(e) = 98\,304e^3 - 98\,304e^2 + 32\,400e - 3\,514 \pmod n$,则$\{G(n(e);s(e)):e \in Z\}$是直径为 $6\,144e^2 - 4\,032e + 648$ 的2紧优双环网无限族.

参 考 文 献

[1] Wong C K, Coppersmith D. A Combinatorial problem related to multimodule memory organization [J]. J Assoc. Comput. Mach., 1974, 21 (3):392-401.

[2] Aguilo F, Fiol M A, An efficient algorithm to find optimaldouble loop networks [J]. Discrete Math., 1995, 138: 15-29.

[3] Esque P, Aguilo F, Fiol M A, Double commutative-step digraphs with minimum diameters [J]. Discrete Math., 1993, 114: 147-157.

[4] Foil M A, Yebra J L, Alegre I, Valero, M,A discrete optimization problem in local networks and data alignment [J]. IEEE Trans. Computers, 1987, 36: 702-713.

[5] 李乔,徐俊明,张忠良,最优双环网络的无限族 [J]. 中国科学, A辑,1993, 23(9): 979-992.

[6] 徐俊明,不含紧优和几乎紧优双环网络无限族 [J]. 科学通报, 1999, 44(5): 486-492.

[7] 徐俊明,2紧优双环网络无限族 [J]. 高校应用数学学报,A辑, 2000, 15(2): 148-152.

[8] 徐俊明,计算机互联双环网络的最优设计 [J]. 中国科学,E辑, 1999, 29(3): 272-278; E辑(英文), 1999, 42(5): 462-469.

7 Infinite Families of New 2-Tight Optimal Double Loop Networks

XU Jun-ming, YIN Zhi-jun

(Department of Mathematics, USTC, Hefei, 230026)

Abstract: This paper gives 7 infinite families of new 2-tight optimal double loop networks.

Key words: interconnection networks; double loop networks; optimal; tight-optimal